Exercices d'algèbre – Fiche 3: Axiome du choix

Responsable: Isar Stubbe

---

1. *Reformulations de l'axiome du choix.* Démontrer l'équivalence des assertions suivantes:
   (a) Pour toute famille d'ensembles non-vides $(A_i)_{i\in I}$, le produit cartésien $\prod_{i\in I} A_i$ est non-vide.
   (b) Pour toute surjection $f\colon A \to B$ il existe $g\colon B \to A$ tel que $f \circ g = \mathsf{id}_B$.
   (c) Pour toute relation d'équivalence $R \subseteq A \times A$ il existe un sous-ensemble $B \subseteq A$ ayant exactement un élément dans chaque classe d'équivalence.
   (d) Pour tout ensemble A il existe une *fonction de choix*, i.e. $f\colon \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ telle que $f(X) \in X$ pour tout $\emptyset \neq X \subseteq A$.

2. *Exemple d'utilisation de l'axiome du choix en analyse réelle.* Indiquer l'utilisation de l'axiome du choix pour démontrer qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in \mathbb{R}$ (selon la "définition ε-δ") si et seulement si l'image par f de toute suite de limite x est une suite de limite fx.
   Solution. Supposons que f n'est pas continue: cela veut dire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \delta$ et pourtant $|fx - fy| \geq \varepsilon$. En particulier, l'ensemble $A_n := \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \frac{1}{n}, |fx - fy| \geq \varepsilon\}$ est non-vide pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par l'axiome du choix, on trouve un élément $(x_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$: c'est une suite qui converge vers x, dont l'image par f ne converge pas vers fx. (L'implication réciproque se démontre sans utiliser l'axiome du choix; voir tout bon cours d'analyse réelle.)

3. *Le principe de bon ordre implique l'axiome du choix.* Pour tout bon ordre $(A, \leq)$, montrer que $f : \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset \to A\colon X \mapsto \min(X)$ est (bien définie et) une fonction de choix.

4. *L'axiome du choix implique le lemme de Zorn.* Pour une démonstation élégante et élémentaire, voir [Jonathan Lewin, *A Simple Proof of Zorn's Lemma*, The American Mathematical Monthly **98** pp. 353–354, 1991].

"Disasters happen without the axiom of choice, disasters happen with the axiom of choice", peut-on lire dans le livre Axiom of Choice *de H. Herrlich [Springer Lecture Notes Math., 2006], entièrement dédié à "the most controversial axiom in mathematics".*