Exercices d'algèbre – Fiche 4: Anneaux, homomorphismes, idéaux

Responsable: Isar Stubbe

Dans la suite, tout anneau $A = (A, +, 0, \cdot, 1)$ *est supposé commutatif et unitaire, et tout homomorphisme d'anneaux* $f\colon A \to B$ *préserve* $+$, 0, $\cdot$ *et* 1.

1. Montrer que $A = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}$ avec b impair$\}$ est un anneau contenant $\mathbb{Z}$ et contenu dans $\mathbb{Q}$. Déterminer les éléments inversibles dans cet anneau. Monter que, si $x \in A$ n'est pas inversible, alors $1 - x$ l'est.

2. Montrer que le produit cartésien de deux anneaux est toujours un anneau (les opérations étant définies 'composante par composante') mais que le produit cartésien de deux corps n'est jamais un corps.

3. Trouver tous les anneaux à 1, 2 et 3 éléments.

4. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/(4)$ n'est pas isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}(2)$, bien qu'ils ont le même nombre d'éléments.

5. Pour un anneau quelconque A, donner tous les homomorphismes de $\mathbb{Z}$ à A, et tous les homomorphismes de $\mathbb{Z}[X]$ à A.

6. Soit l'unique homomorphisme $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ (voir ci-dessus) et deux homomorphismes $g, h\colon \mathbb{Q} \to A$. Montrer que $g \circ f = h \circ f$ implique $g = h$. Pourquoi est-ce remarquable?

7. Montrer qu'un sous-ensemble $I \subseteq A$ d'un anneau en est un idéal si et seulement si I est le noyau d'un homomorphisme partant de A, si et seulement si I est le noyau d'un homomorphisme surjectif partant de A.

8. Pour tout homomorphisme $f\colon A \to B$, démontrer que $\mathrm{im}(f)$ est un sous-anneau de B, isomorphe au quotient $A/\mathrm{ker}(f)$. Préciser cette propriété lorsque f est une surjection ou une injection.

9. Montrer que $A = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est un anneau (commutatif!) pour le produit et la somme matriciels. Déterminer les éléments (non-)inversibles de A. Montrer que les éléments non-inversibles forment un idéal I tel que $A/I \cong \mathbb{R}$.

10. Montrer qu'un anneau non-nul A est un corps si et seulement si A n'admet que les idéaux triviaux, si et seulement si tout homomorphisme de A vers un anneau non-nul est injectif.