Exercices d'algèbre – Fiche 5: Idéaux premiers, idéaux maximaux

Responsable: Isar Stubbe

---

1. Déterminer s'il s'agit d'un idéal ou d'un sous-anneau (ou aucun des deux) lorsqu'on considère:
   (a) l'ensemble des nombres pairs dans $\mathbb{Z}$,
   (b) l'ensemble des nombres impairs dans $\mathbb{Z}$,
   (c) l'ensemble des polynômes de degré pair dans $\mathbb{Q}[X]$,
   (d) l'ensemble des matrices diagonales dans $A = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,
   (e) l'ensemble des polynômes dont 3 est une racine dans $\mathbb{R}[X]$,
   (f) l'ensemble des points de la droite d'équation $3x + 2y = 1$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
   (g) l'ensemble $\{\frac{a}{3^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ dans $A = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}$ avec b impair$\}$,

   (A propos d'un sous-ensemble d'un anneau: quand est-il à la fois un sous-anneau et un idéal?)

2. Un élément $a \in A$ d'un anneau est *nilpotent* s'il existe un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $a^n = 0$. Montrer que l'ensemble $N(A)$ des nilpotents dans A est un idéal; c'est le *nilradical* de A. Montrer que, pour tout $a \in N(A)$ et tout $b \in A$, $1 + ab$ est inversible. Montrer que le nilradical de $A/N(A)$ est nul.

3. Montrer qu'un quotient A/I est un anneau intègre si et seulement si I est un idéal premier de A, et que ce quotient est un corps si et seulement si I est maximal. (Qu'est-ce que cela dit si on pose $I = (0)$?) En déduire que tout idéal maximal est premier.

4. Soit un homomorphisme d'anneaux $f\colon A \to B$. Montrer que l'image réciproque d'un idéal de B est un idéal de A. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est un idéal premier. Par contre, pour l'unique homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, montrer que l'image réciproque de l'unique idéal maximal de $\mathbb{Q}$ n'est pas maximal dans $\mathbb{Z}$.

5. Utiliser le lemme de Zorn pour montrer que tout idéal propre d'un anneau A est contenu dans un idéal maximal. En déduire que tout élément non-inversible d'un anneau est contenu dans un idéal maximal, et que donc la réunion de tous les idéaux maximaux est l'ensemble des éléments non-inversibles de A. Est-ce un idéal?

6. Soit A un anneau non-trivial. Montrer l'équivalence des assertions suivantes:
   (a) A admet un unique idéal maximal,
   (b) les éléments non-inversibles de A forment un idéal (nécessairement maximal),
   (c) pour tout $x \in A$, soit x est inversible, soit $1 - x$ est inversible.

   Dans ce cas, on dit que A est un *anneau local*, et le quotient de A par son unique idéal maximal est son *corps résiduel*.

7. Montrer que $A = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}$ avec b impair$\}$ est un anneau local, dont le corps résiduel est un corps à deux éléments.

8. Montrer que $A = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est un anneau local, et calculer son corps résiduel.