Exercices d'algèbre – Fiche 6: Anneaux de polynômes

Responsable: Isar Stubbe

Pour $f = f_n X_n + ... + f_1 X + f_0 \in A[X]$ et $a \in A$, on note $f(a) := f_n a^n + ... + f_1 a + f_0$ et on dit que a est une *racine* de f si $f(a) = 0$. Rappellons qu'un élément d'un anneau est *irréductible* s'il est non-nul, non-inversible, et sans diviseurs propres; un élément est *premier* s'il est non-nul et engendre un idéal premier.

1. Quelque soit l'anneau A, montrer que $A[X]$ n'est jamais un corps.

2. Diviser (avec reste) ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible:
   (a) $-X^4 + 3X^3 + X^2 - X + 5$ par $2X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$,
   (b) $-X^4 + 3X^3 + X^2 - X + 5$ par $2X^2 + X + 1$ dans $(\mathbb{Z}/(6))[X]$,
   (c) $-X^4 + 3X^3 + X^2 - X + 5$ par $5X^2 + X + 1$ dans $(\mathbb{Z}/(6))[X]$,
   (d) $-X^4 + 3X^3 + X^2 - X + 5$ par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$,
   (e) $-X^4 + 3X^3 + X^2 - X + 5$ par $2X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

3. Montrer qu'un anneau A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre. Dans ce cas, observer que $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ pour tous $f, g \in A[X]$. (Par convention, le degré du polynôme zéro est $-\infty$.)

4. Soit A un anneau quelconque. Montrer que, dans $A[X]$, on peut toujours diviser (avec reste) par les polynômes $f = f_n X^n + ... f_1 X + f_0$ avec f_n inversible. En déduire que $a \in A$ est une racine de f si et seulement si $X - a$ divise f dans $A[X]$. Pour $A = \mathbb{Z}/(4)$, donner toutes les racines de $2X^2 + 2X$ et calculer toutes les factorisations obtenues. Montrer que A est intègre si et seulement si tout $0 \neq f \in A[X]$ admet au plus $\deg(f)$ racines.

5. Pour A un anneau quelconque et $a \in A$, montrer que $\gamma\colon A[X] \to A\colon f \mapsto f(a)$ est un homomorphisme surjectif. Quel isomorphisme détermine-t-il? Pour $p, n \in \mathbb{Z}$ avec p premier, montrer que $I = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid p \text{ divise } f(n)\}$ est un idéal premier non-principal de $\mathbb{Z}[X]$.

6. Montrer qu'un anneau A est un corps si et seulement si $A[X]$ est principal.
   Indication. Si A est un corps, alors la division euclidienne de polynômes sert à démontrer que $A[X]$ est principal. Réciproquement, pour $a \neq 0$ dans A on considère l'idéal $(a, X) \subseteq A[X]$. Par hypothèse on a $(a, X) = (f)$ pour un $f \in A[X]$. Ecrire en toutes lettres que $f = f_n X^n + ... + f_1 X + f_0$ divise à la fois a et X, et conclure à l'aide de l'intégralité de ($A[X]$ et de) A que $(a, X) = (f_0) = A[X]$. En déduire que a est inversible.

7. Soit K un corps. Montrer que $K[X, Y]$ est intègre mais pas principal.

   Le Théorème de la base *de D. Hilbert dit que, si A est un anneau noetherien, alors $A[X]$ l'est aussi. Ainsi $K[X, Y]$ est un anneau noetherien qui n'est pas principal. C'est aussi le cas de $\mathbb{Z}[X]$.*

8. Soit A un anneau principal. Montrer que $a \in A$ est irréductible si et seulement si a est premier. Montrer que les idéaux premiers non-nuls coïncident avec les idéaux maximaux non-nuls. En déduire, pour K un corps, que $f \in K[X]$ est irréductible si et seulement si $K[X]/(f)$ est un corps.

9. Soit K un corps. Montrer que tout $f \in K[X]$ de degré 1 est irréductible. Montrer que $f \in K[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible si et seulement si f n'a pas de racine dans K. Qu'en est-il pour f de degré 4 ou plus? Qu'en est-il pour $K = \mathbb{C}$? Qu'en est-il si K n'est pas un corps?

10. Pour K un corps et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que $K[X]/(X^n)$ est un anneau local et déterminer son corps résiduel.