Exercices d'algèbre – Fiche 8: Illustration des nombres premiers de Gauss

Responsable: Isar Stubbe

Nous avons démontré que $m + ni$ est un *nombre premier de Gauss* si et seulement si:

– soit $m \neq 0 \neq n$ et $m^2 + n^2$ est un nombre premier,
– soit $m = 0$ et $|n|$ est un nombre premier qui n'est pas une somme de carrés non-nuls,
– soit $n = 0$, et $|m|$ est un nombre premier qui n'est pas une somme de carrés non-nuls.

Il est facile de voir que, pour tout nombre premier $p \neq 2 \in \mathbb{Z}$, soit $p \equiv 1 \mod 4$, soit $p \equiv 3 \mod 4$ (et $p = 2$ est le seul nombre premier tel que $p \equiv 2 \mod 4$). De plus, on vérifie aussi facilement $m^2 + n^2 \not\equiv 3 \mod 4$ pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, si un nombre premier $p \neq 2$ est une somme de carrés non-nuls, alors $p \equiv 1 \mod 4$. Par le *Théorème des deux carrés* de P. Fermat (en réalité déjà publié par A. Girard dans sa traduction d'un livre d'arithmétique de S. Stevin en 1625), aussi la réciproque est vraie: si $p \equiv 1 \mod 4$ alors p est une somme de carrés (et bien sûr aussi 2 est une somme de carrés). Ainsi, pour tout nombre premier $p \in \mathbb{Z}$, on a $p \equiv 3 \mod 4$ si et seulement si p n'est pas une somme de carrés non-nuls. Il suit que $m + ni$ est un nombre premier de Gauss si et seulement si:

– soit $m \neq 0 \neq n$ et $m^2 + n^2$ est un nombre premier,
– soit $m = 0$ et $|n|$ est un nombre premier tel que $|n| \equiv 3 \mod 4$,
– soit $n = 0$ et $|m|$ est un nombre premier tel que $|m| \equiv 3 \mod 4$.

Voici une illustration de quelques nombres premiers de Gauss dans le plan complexe: