Exercices d'algèbre – Fiche 9: ACC/DCC

Responsable: Isar Stubbe

On dit qu'un ordre partiel $(E, \leq)$ satisfait à:

- *Ascending Chain Condition (ACC)* si pour toute chaîne ascendante $a_0 \leq a_1 \leq ...$ dans E il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = a_{n+1} = ...$
- *Descending Chain Condition (DCC)* si pour toute chaîne déscendante $a_0 \geq a_1 \geq ...$ dans E il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = a_{n+1} = ...$

Par définition, un anneau A est *noethérien* (d'après Emmy Noether, 1882–1935) si l'ensemble de ses idéaux (ordonné par $\subseteq$) satisfait à (ACC), et *artinien* (d'après Emil Artin, 1898–1962) si cet ensemble satisfait à (DCC).

1. Montrer qu'un ensemble partiel $(E, \leq)$ satisfait (ACC) si et seulement si tout sous-ensemble non-vide de E admet un élément maximal. Formuler le résultat dual pour (DCC). Appliquer à un anneau noethérien (artinien).

2. Montrer que tout anneau fini est noethérien et artinien. Montrer que tout corps est noethérien et artinien.

3. Soit I un idéal d'un anneau A. Montrer qu'il y a une bijection (preservant l'ordre) entre les idéaux de A contenant I, et les idéaux du quotient A/I. En déduire que, si A est noethérien (artinien), alors A/I l'est aussi.

4. Soit A un anneau artinien intègre. Pour tout $a \in A \setminus 0$, déduire de $(a) \supseteq (a^2) \supseteq ...$ que $a \in A^\times$. Conclure que A est un corps (et donc p.e. $\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau artinien).

5. Soit P un idéal premier dans un anneau artinien A. Considérer le quotient A/P et utiliser les exercices précédents pour montrer que P est maximal.

6. Montrer que $A[X]$ n'est jamais artinien.

7. Montrer qu'un anneau A est noethérien si et seulement si tout idéal est finiment engendré. Ainsi tout anneau principal est noethérien (notamment $\mathbb{Z}$, $K[X]$ pour K un corps, ...).

   On peut montrer qu'il suffit que les idéaux *premiers* soient finiment engendrés, voir [I. S. Cohen, *Commutative rings with restricted minimum condition*, Duke Math. J. **17**, 1950, pp. 27–42].

8. Utiliser un exercice précédent pour montrer que, si $A[X]$ est noethérien, alors aussi A l'est.

   Le *Théorème de la base de Hilbert* (d'après David Hilbert, 1862–1943) dit que, si A est un anneau noethérien, alors $A[X]$ est un anneau noethérien (et, par induction sur n, tout anneau $A[X_1, ..., X_n]$ est aussi noethérien). Tout bon livre d'algèbre commutative contient une démonstration.

   Par ailleurs, on peut montrer qu'un anneau est artinien si et seulement s'il est noethérien et tout idéal premier est maximal, voir p.e. Théorème 8.5 dans *Introduction to commutative algebra* par M. F. Atiyah et I. G. Macdonald (1969).