ALGEBRE LINEAIRE (L2 INFO) – ULCO

EXAMEN DU MERCREDI 14 JANVIER 2015 DE 13H30 A 16H30

Responsable: Isar STUBBE

Les documents sont autorisés, les calculatrices ne sont pas autorisées. Justifier toutes vos réponses!

1. Définir toutes les 'opérations élémentaires' et les 'matrices élémentaires', et prouver que toute matrice élémentaire est inversible.

2. Définir 'matrice orthogonale' et prouver que son déterminant est toujours 1 ou -1.

3. Lesquelles des matrices suivantes sont inversibles? orthogonales? S'il s'agit d'une matrice inversible, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ (pour } \theta \in \mathbb{R})$$

4. Donner une factorisation PLU de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ou expliquer pourquoi elle n'est pas diagonalisable.

6. Calculer les valeurs singulières de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Pour $n \geq 1$, soit la matrice colonne $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $M = KK^t$.

   (a) Justifier pourquoi M est diagonalisable.

   (b) Donner le rang de M.

   (c) Donner le déterminant de M.

   (d) Donner la trace de M.

   (e) Prouver que $\|K\|^2$ est une valeur propre de M.

   (f) Donner toutes les valeurs propres de M (avec leurs multiplicités).

——— *fin* ———

ALGEBRE LINEAIRE (L2 INFO) – ULCO

CORRIGE DE L'EXAMEN DU MERCREDI 14 JANVIER 2015 DE 13H30 A 16H30

Responsable: Isar STUBBE

1. Voir notes de cours.

2. Pour la définition: voir notes de cours. Par les règles de calcul pour le déterminant on trouve $\text{dét}(I) = \text{dét}(AA^{-1}) = \text{dét}(AA^t) = \text{dét}(A)\text{dét}(A^t) = \text{dét}(A)^2$ donc $\text{dét}(A) = \pm 1$.

3. Puisque $\text{dét}(A) \neq 0$ il s'agit d'une matrice inversible; on calcule son inverse avec la matrice compagnon; mais A n'est pas orthogonale car $AA^t \neq I$. On a $\text{dét}(B) = 0$ donc non-inversible donc *a fortiori* non-orthogonale. Clairement $CC^t = I$ et donc la matrice est orthogonale, et donc inversible.

4. On échelonne la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} = U$$
Les opérations élémentaireseffectuées sont: $L_2 := L_2 - 2L_1$ puis $L_3 := L_3 + L_1$ puis $L_3 := L_3 - \frac{1}{5}L_2$; celles-ci correspondent avec des matrices élémentaires, notons-les E_1, E_2 et E_3. On sait donc que $E_3E_2E_1A = U$, puis on calcule $L = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$ pour conclure que $A = LU$.

5. Le polynome caractéristique est $\text{dét}(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - (-1)(-2)$, ses racines sont 1 et 4. (Deux valeurs propres distinctes pour une matrice 2×2: la matrice est donc diagonalisable.) Les espaces propres sont $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ et $E_4 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ pour que BDB^{-1} soit la diagonalisation de la matrice donnée.

6. Les valeurs singulières de la matrice donnée – notons-la A – sont les racines carrées des valeurs propres strictement positives de AA^t, ou de manière équivalente, de A^tA. (Le calcul avec AA^t est plus facile car il s'agit d'une matrice 2×2.)

7. (a) $M = KK^t$ est symétrique, donc diagonalisable. (b) $\text{rang}(M) = 1$ car chaque ligne de M est multiple de sa première ligne (par construction), qui est non-nulle. (c) $\text{dét}(M) = 0$ si $n \geq 2$ car le rang est strictement inférieur au nombre de lignes; si $n = 1$ on a $\text{dét}(M) = 1$. (d) $\text{tr}(M) = 1+2^2+3^2+...+n^2$. (e) $\|K\|^2 = K^tK$ donc $MK = KK^tK = \|K\|^2K$. (f) $\text{tr}(M) = \|K\|^2$ est donc valeur propre de M. Mais $\text{tr}(M)$ est la somme de toutes les valeurs propres de M, $\text{dét}(M)$ est le produit de toutes les valeurs propres de M, et toutes les valeurs propres sont positives (car $M = KK^t$!), on trouve nécessairement que $\text{tr}(M)$ est valeur propre de multiplicité 1, et 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$.