Algèbre linéaire – L2 Informatique – ULCO

Examen du mercredi 17 janvier 2018 de 9h à 12h

Responsable: Isar Stubbe

Parcours **Signal et informatique industrielle***: faites uniquement la Partie A; vous avez 1h30.*
Parcours **Informatique***: faites les Parties A et B; vous avez 3h.*
Les documents sont autorisés, les calculatrices ne sont pas autorisées.

Partie A

1. Soient A et B deux matrices symétriques de même genre.
   (a) Est-ce que le produit AB est toujours une matrice symétrique?
   (b) Est-ce que le carré A^2 est toujours une matrice symétrique?
   Si oui, donner une démonstration, sinon donner un contre-exemple.

2. (a) Calculer une factorisation $PA = LU$ de la matrice suivante:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (b) Donner le rang, la nullité et le déterminant de A.
   (c) Résoudre le système linéaire homogène $AX = O$.

3. Démontrer l'assertion suivante: si on a $A = BC$ pour trois matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ et $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, alors il suit que $\mathrm{Ker}(C) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(B)$.

Partie B

4. Trouver l'équation de la droite $y = ax + b$ passant au plus près des points $(-1, 2)$, $(0, 4)$ et $(1, 5)$.

5. Pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,
   (a) calculer une factorisation $A = QR$ de la matrice A,
   (b) calculer la projection orthogonale de P sur l'image de A,
   (c) calculer la distance entre P et sa projection orthogonale.

6. Donner une factorisation $A = BDB^{-1}$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ou expliquer pourquoi cela n'est pas possible.

7. Calculer les valeurs singulières de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

——— *Fin* ———