Algèbre linéaire – L2 Informatique – ULCO

Examen du mardi 15 janvier 2019 de 13h30 à 16h30

Responsable: Isar Stubbe

Parcours **Signal et informatique industrielle***: faites uniquement la Partie A; vous avez 1h30.*
Parcours **Informatique***: faites les Parties A et B; vous avez 3h.*
Les documents sont autorisés, les calculatrices ne sont pas autorisées.

Partie A

1. (a) Calculer une factorisation LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -7 & -7 \end{pmatrix}$.
   (b) Donner son rang et sa nullité.
   (c) Calculer une matrice B à colonnes libres dont l'image est le noyau de A.

2. Pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, démontrer que $A \cdot B = O$ si et seulement si $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

3. Calculer les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A^{-1} \cdot \text{dét}(B^{-1}) \cdot (\frac{1}{2} \cdot B)^2 \cdot A^3.$$

Partie B

4. Calculer l'équation de la droite $y = ax + b$ passant au plus près des points $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$.

5. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale.

6. On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = O$.
   (a) Donner un exemple d'une matrice nilpotente non-nulle (et spécifier k).
   (b) Montrer qu'aucune matrice nilpotente est inversible.
   (c) Montrer que l'unique matrice nilpotente symétrique est la matrice nulle.

——— *fin* ———