1

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -7 & -7 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 := L_2 + 2L_1 \\ L_3 := L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 := L_3 + 3L_2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1}}\, E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{ok})$$

(b) rang$(A) = 3$, null$(A) = 5 - 3 = 2$

(c) $A.X = 0 \iff \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_3 + 0x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

$\iff x_5 = \alpha, \quad x_4 = \beta,$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-x_5) = -\frac{\alpha}{2}$$

$$x_2 = x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -\frac{\alpha}{2} - 2\beta - 3\alpha$$

$$= -\frac{7}{2}\alpha - 2\beta$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(-2x_2 + x_4 - x_5) = \frac{1}{3}\left(-2\left(-\frac{7}{2}\alpha - 2\beta\right) + \beta - \alpha\right)$$

$$= \frac{1}{3}(6\alpha - 5\beta) = 2\alpha + \cancel{\beta}\,\frac{5}{3}\beta$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -7/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} +5/3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} 2 & 5/3 \\ -7/2 & -2 \\ -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ok)

à colonnes libres

2 $A \cdot B = 0 \iff \mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$

$\boxed{\Rightarrow}$ si $A \cdot B = 0$ et $X \in \mathrm{Im}(B)$,

alors $X = B \cdot Y$ donc $A \cdot X = ABY$

$$= A \cdot 0$$

$$= 0$$

d'où $X \in \mathrm{Ker}(A)$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

alors chaque colonne $B_i = B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ième place

de B est dans $\mathrm{Ker}(A)$, donc

$A \cdot B_i = 0$ donc $A \cdot \left(B_1 | \dots | B_k \right) = 0$

d'où $A \cdot B = 0$

③ $\det(A) = \det\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -42 = 2\cdot(-21)$

$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 16 = 2^4$

$$\det(C) = \det\left[A^{-1} \cdot \underbrace{\det(B^{-1})} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\cdot B\right)^2 \cdot A^3\right]$$

n=3 !!

$$= \det(B^{-1})^3 \cdot \det(A^{-1}) \cdot \det\Big(\underbrace{\tfrac{1}{4}}\cdot B^2\Big) \cdot \det(A^3)$$

$$= \frac{1}{(\det B)^3} \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \det(B)^2 \cdot \det(A)^3$$

$$= \frac{\det(A)^2}{\det(B)} \cdot \frac{1}{4^3}$$

$$= \frac{(2\cdot(-21))^2}{2^4} \cdot \frac{1}{2^6}$$

$$= \frac{2^2 \cdot 21^2}{2^{10}} = \frac{21^2}{2^8} = \left(\frac{21}{16}\right)^2$$

④ $(0,1), (1,1), (2,2), (3,2)$

$y = ax + b$

donc on veut $\begin{cases} 0.a + b = 1 \\ 1.a + b = 1 \\ 2.a + b = 2 \\ 3.a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Syst. impossible, donc moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

résol du système :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 11 \\ 6 & 4 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 6 \\ 14 & 6 & 11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 6 \\ 0 & -\frac{20}{6} & -3 \end{array}\right)$$

donc $\begin{cases} -\frac{20}{6} . b = -3 & \text{d'où } b = \frac{9}{10} \\ 6a + 4b = 6 & \text{d'où } a = \frac{1}{6}(-4b+6) \end{cases}$

$$= \frac{1}{6}\left(-4.\frac{9}{10} + 6\right)$$

$$= \frac{4}{10}$$

donc éqn recherchée est $y = \frac{4}{10} . x + \frac{9}{10}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Valeurs propres :</u>

$\det(A - \lambda . I) = 0$

$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda) . \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 1 . \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda) . \left[(-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) \right] - \left[(-\lambda)(-\lambda) . 1 \right] = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 . \lambda^2 - \lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda + \lambda^2) . \lambda^2 - \lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 . \left((1 - 2\lambda + \lambda^2) - 1 \right) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^3 (-2 + \lambda) = 0.$

$\Leftrightarrow \underline{\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2}$

donc $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 2\}$.

espaces propres :

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$x_4 = \alpha$

$x_3 = \beta$

$x_2 = \gamma$

$x_1 = -\alpha$

$$= \mathrm{Im} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

à colonnes libres mais pas orthonormales...

donc Gram-Schmidt ...

$$= \mathrm{Im} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

à colonnes orthonormales

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$x_4 = \alpha, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = \alpha$

$$= \mathrm{Im} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

colonne orthonormale.

diagonalisation :

$$A = B \cdot D \cdot B^t$$

où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

---

6 (a) p.e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\det(A^k) = \det(A)^k$ par les propriétés du déterminant, donc si $A^k = 0$ alors $\det(A)^k = \det(0) = 0$ donc $\det(A) = 0$ donc A non-inversible

(c) A symétrique implique que $A = B \cdot D \cdot B^t$ avec D diagonale et B orthogonale, et donc $A^k = B \cdot D^k \cdot B^t$ donc $D^k = B^t \cdot A^k \cdot B$.
Si $A^k = 0$ alors $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k \end{pmatrix} = B^t \cdot 0 \cdot B = 0$
donc chaque $d_i = 0$, donc $D = 0$, donc $A = 0$.
