

Algèbre linéaire – L2 Informatique – ULCO

Examen du vendredi 22 juin 2018 de 9h à 12h

Responsable: Isar Stubbe

Parcours Signal et informatique industrielle: faites uniquement la Partie A; vous avez 1h30.

Parcours Informatique: faites les Parties A et B; vous avez 3h.

Les documents sont autorisés, les calculatrices ne sont pas autorisées.

Partie A

- (a) Définir toutes les ‘opérations élémentaires’ et ‘matrices élémentaires’.
(b) Démontrer que toute matrice élémentaire est inversible.
- Déterminer une fonction polynomiale dont le graphe passe par les points $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$ et $(3, 1)$.
- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Calculer une factorisation $PA = LU$.
 - Trouver une matrice à colonnes libres B telle que $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$.
 - Trouver une matrice à colonnes libres C telle que $\text{Ker}(A) = \text{Im}(C)$.

Partie B

- Calculer tous les $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ qui sont orthogonaux à l'image de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Montrer que, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible et $\lambda \in \mathbb{R}$ en est une valeur propre, alors $\lambda \neq 0$ et λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} .
- Démontrer que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'expression $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xz - 4xy - 2yz$ est positive.
- Soit A une matrice dont la matrice des valeurs singulières est

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $A^t A$ n'est pas une matrice inversible.

————— *Fin* —————