Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 1: Matrices, opérations

1. Calculer, si possible, la somme $A+B$, le produit $A\cdot B$ et le produit $B\cdot A$ des matrices suivantes:

   (a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

   (b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -1\\ 0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

   (c) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -1 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

   (d) $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1 & 6\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

   (e) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$

2. Pour les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, calculer $A\cdot B$, $B\cdot A$ et $B\cdot B$. Conclusion?

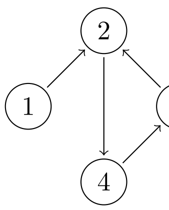
3. Prouver à partir des propriétés fondamentales de la multiplication par scalaire que, pour toute matrice A, son multiple par zéro est la matrice nulle (du même genre que A), et son multiple par -1 est la matrice opposée de A: $0A=O$ et $(-1)A=-A$.

4. Prouver que, pour tout $a\neq b$ dans $\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ \frac{a^n-b^n}{a-b} & b^n\end{pmatrix}$.

5. Pour A et B des matrices $n\times n$ *triangulaires supérieures*, prouver qu'aussi $A\cdot B$ et $A+B$ sont triangulaires supérieures. Déduire, par transposition, le même résultat pour les matrices *triangulaires inférieures*. Et pour les *matrices diagonales*?

6. Etablir la relation exacte entre:

   le *graphe orienté*



   et sa *matrice d'adjacence* $M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

   Calculer M^2, M^3 et $M+M^2+M^3$, et interpréter les résultats sur le graphe.

7. Supposons qu'une matrice $N\in\mathbb{R}^{m\times n}$ contient les notes (sur 20, disons) de m étudiants à n examens. Quel calcul matriciel produit la note de l'étudiant i à l'examen j? La moyenne de l'étudiant i pour tous les examens? La moyenne de la classe pour l'examen j? La moyenne de la classe pour l'ensemble des examens?

8. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2=A+2I_3$, en déduire que A est inversible et calculer son inverse.

9. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Calculer A^3-A, en déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

10. Pour les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, calculer AB et AC; A peut-elle être inversible?

11. Dans cet exercice (comme aussi ailleurs) on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ définit une fonction $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon X \mapsto AX$.

(i) Montrer que f_A est une *transformation linéaire*: on a que $f_A(X+Y) = f_A(X) + f_A(Y)$ et $f_A(\alpha X) = \alpha f_A(X)$.

(ii) Montrer que, pour toute transformation linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, il existe une unique matrice A telle que $f = f_A$.
Indication: calculer l'image par f de $(1,0)$ et $(0,1)$.
(On appelle A la *matrice représentative de l'application par rapport aux bases canoniques.*)

(iii) Observer que $f_{AB} = f_A \circ f_B$, si $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(iv) Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, visualiser $X+Y$ et αX dans le plan.

(v) Visualiser les transformations linéaires f_A du plan si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(vi) Vérifier que la rotation (anti-horlogique) de centre $(0,0)$ et d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ est une transformation linéaire du plan, puis donner explicitement sa matrice.

(vii) Prouver que, pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\varphi + \theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta \quad \text{et} \quad \sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta$$

Indication: considérer les rotations par les angles φ, θ et $\varphi + \theta$.

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 2: Systèmes linéaires

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants:

(a) $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+z=-2 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+z=-2 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_2+x_3-x_5=-2 \\ x_3-x_6=0 \end{cases}$

(f) $\{\ x_1+x_3-x_5=-2$

2. Pour $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X\in\mathbb{R}^{3\times 1}$, résoudre les équations $AX=X$ et $AX=4X$.

3. Compléter, si possible, l'équation matricielle $AB=C$ si

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Sous quelles conditions sur les termes indépendants est-ce que les systèmes suivants admettent une solution? Quelles sont les solutions alors?

(a) $\begin{cases} x+y+2z=b_1 \\ x+z=b_2 \\ 2x+y+3z=b_3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+2y+3z=b_1 \\ 2x+5y+3z=b_2 \\ x+8z=b_3 \end{cases}$

5. Sachant que tout cercle dans le plan est d'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ pour $a,b,c\in\mathbb{R}$, trouver l'équation du cercle qui passe par les points $(-4,5)$, $(-2,7)$ et $(4,-3)$.

6. Sachant que toute parabole d'axe verticale dans le plan est d'équation $y=ax^2+bx+c$ pour $a,b,c\in\mathbb{R}$, trouver l'équation de la parabole passant par les points $(1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{7}{4})$ et $(3,8)$.

7. Sachant que toute droite dans le plan est d'équation $ax+by=1$ pour $a,b\in\mathbb{R}$, trouver l'équation de la droite passant par les points $(2,3)$ et $(11,7)$.

8. Résoudre le système $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ puis tracer les droites $x+2y=6$ et $2x-y=1$ dans le plan. Constat?

9. Un "carré magique normal" est une matrice $n\times n$ contenant exactement les nombres $1,...,n^2$ de façon que la somme des éléments de chaque colonne, de chaque ligne et de chaque diagonale est la même (... donc combien vaut cette somme?). Donner tous les carrés magiques 2×2 et 3×3.

10. Trouver $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que pour *tout* polynôme $P(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ on ait:

$$\int_2^4 P(x)dx=\alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4).$$

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 3: Factorisation LU, calcul de matrice inverse

1. Ecrire toutes les matrices élémentaires 3×3, et leurs inverses.

2. Echelonner les matrices suivantes, puis en déduire une factorisation "$PA = LU$":

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

3. Montrer qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible si et seulement si la matrice triangulaire supérieure U, obtenue par factorisation $PA = LU$, est inversible.

4. Calculer - si possible - l'inverse des matrices suivantes:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Ecrire chaque système linéaire ci-dessous comme une équation matricielle, identifier les matrices inversibles parmi les matrices de coefficients, et le cas échéant calculer l'unique solution du système par un calcul de matrice inverse:

(a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + z = -2 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$

6. Soit une matrice inversible A de genre $n \times n$, et B son inverse. Si Alice dispose de la matrice A, et Bob de la matrice B, alors Alice peut envoyer des messages codés à Bob. On numérote les lettres de l'alphabet de 1 à 26, et le numéro 0 représentera un espace. Alice découpe son message en blocs de longeur n (en ajoutant eventuellement des espaces à la fin du message); puis elle remplace les lettres et les espaces par les nombres correspondants pour former des matrices $1 \times n$; ensuite elle multiplie chacune de ces lignes avec A et elle envoie les résultats à Bob. Comment fera Bob pour décoder le message? Et comment est-ce que Bob peut envoyer un message codé à Alice? Calculer l'inverse de la matrice A ci-dessous, et utiliser la bonne matrice pour coder "`hello world`" (par Alice) et décoder "$(32/3, 5, -10/3)(-4/3, 9, 23/3)(-8/3, 0, 31/3)(-8, 15, 16)$"(par Bob):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 4: Image et noyau

1. Exprimer chacune des colonnes B_1, B_2 et B_3 comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A, puis construire une matrice M telle que $AM = B$ où B est la matrice dont les colonnes sont B_1, B_2, B_3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ont la même image.

3. Pour chacune matrices suivantes, donner une sous-matrice à colonnes libres ayant la même image, puis en déduire son rang. Identifier finalement les matrices inversibles.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Pour $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ on sait que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$ et que les deux premières colonnes de A sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer la troisième colonne de A, puis déterminer si $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$.

5. Pour chacune des matrices suivantes, exprimer son noyau comme l'image d'une matrice à colonnes libres, puis en déduire sa nullité. Identifier aussi les matrices inversibles.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Montrer qu'une matrice carrée A est de rang 1 si et seulement s'il existe une ligne L et une colonne C non-nulles telles que $A = CL$.

7. Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Montrer que, s'il existe des matrices $B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ telles que $AB = I_m$ et $CA = I_n$, alors nécessairement $m = n$ et $B = C$. Autrement dit, c'est le cas si et seulement si A est inversible.

8. Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que, s'il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $AB = I_n$, alors nécessairement $BA = I_n$. Autrement dit, c'est le cas si et seulement si A est inversible.

9. Démontrer: pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on a $A^2 = O$ si et seulement si $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$. Donner un exemple non-trivial d'une telle matrice.

10. (Comme ailleurs, dans cet exercice aussi on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^{n\times 1}$.) Soit $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\colon X \mapsto AX$ l'application linéaire déterminée par une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Montrer que:

    1. f_A est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$,
    2. f_A est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{O\}$,
    3. si $m \neq n$, alors f_A ne peut pas être une bijection,
    4. si $m = n$, alors f_A est injective si et seulement si f_A est surjective, si et seulement si f_A est bijective, si et seulement si A est inversible.

11. Dessiner dans le plan l'image et le noyau de l'application $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon X \mapsto AX$ si A est:

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 5: Déterminants

1. Calculer le déterminant des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire la valeur de $\text{dét}(\text{dét}(C^t)(2A)^2B^{-1}(-D))$.

2. Vérifier par un calcul de déterminant si les systèmes homogènes suivants admettent des solutions non-triviales; le cas échéant, donner une matrice à colonnes libres engendrant l'ensemble des solutions.

(a) $\begin{cases} 3x + 7y = 0 \\ -4x + 8y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x + 7y - 2z = 0 \\ -4x + 8y = 0 \\ -2x + 30y - 4z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x + 7y - 2z + w = 0 \\ -4x + 8y + w = 0 \\ -2x + 30y - 4z + w = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

3. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que les systèmes homogènes suivants admettent des solutions non-triviales:

$$\begin{cases} x + 7y - 2z = 0 \\ -4x + 8y + \lambda z = 0 \\ -2x + 30y - 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ -x + \lambda z = 0 \\ -2x + \lambda y - 4z = 0 \end{cases}$$

4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Prouver que A est inversible si et seulement si A^tA l'est.

5. Pour tout $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ on peut démontrer la formule du *déterminant de Vandermonde*:

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

(a) Expliciter et prouver cette formule pour $n = 1$ et $n = 2$. (La preuve du cas général n'est pas facile.)

(b) En déduire que, pour $n+1$ points de $\mathbb{R}^2$, disons (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n), avec les x_i tous distincts, il existe une unique fonction polynomiale de degré n,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto a_nx^n + ... + a_1x + a_0,$$

dont le graphe contient tous les (x_i, y_i): c'est le *polynôme d'interpolation*.

(c) Donner le polynôme d'interpolation ainsi déterminé par $(-2, 1), (-1, 2), (0, 0), (1, 2)$.

6. (a) Prouver que l'aire de l'unique parallélogramme déterminé par les trois sommets $(0, 0)$, (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{R}^2$ (quel est donc le quatrième sommet?) est égal à la valeur absolue de dét $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

(b) Trouver toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le parallélogramme déterminé par les sommets $(0, 0)$, $(3, 1)$ et $(4, \lambda)$ dans $\mathbb{R}^2$ soit d'aire 3.

7. Sachant que les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17, montrer - sans le calculer! - que le déterminant de la matrice ci-dessous est divisible par 17:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

8. Pour mesurer la complexité (arithmétique) d'un calcul matriciel, on compte le nombre de sommes et le nombre de produits que l'on doit faire pour exécuter ce calcul. Attention, une somme de k termes (ou un produit de k facteurs) compte pour $k-1$ sommes consécutives de deux termes (ou $k-1$ produits de deux facteurs). Pour simplifier, on admettera ici qu'une différence est une somme, et qu'une division est un produit.

   (a) Pour une matrice A de genre 3×3, quelle est la complexité du calcul de $\text{dét}(A)$ lorsqu'on développe vers une colonne ou une ligne? Quelle est la complexité de la factorisation $A = LU$ par réductions inférieures (en supposant qu'aucune permutation n'est nécessaire)? Quelle est donc la complexité du calcul de $\text{dét}(A) = \text{dét}(L)\text{dét}(U)$?

   (b) Même question pour une matrice 4×4.

9. On veut calculer le produit $AB = C$ de matrices 2×2.

   (a) Donner la complexité arithmétique pour la formule habituelle.

   (b) Observer qu'on peut aussi poser

$$\text{d'abord} \begin{cases} m_1 := (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \\ m_2 := (a_{21} + a_{22})b_{11} \\ m_3 := a_{11}(b_{12} - b_{22}) \\ m_4 := a_{22}(b_{21} - b_{11}) \\ m_5 := (a_{11} + a_{12})b_{22} \\ m_6 := (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12}) \\ m_7 := (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}) \end{cases} \qquad \text{puis} \begin{cases} c_{11} = m_1 + m_4 - m_5 + m_7 \\ c_{12} = m_3 + m_5 \\ c_{21} = m_2 + m_4 \\ c_{22} = m_1 - m_2 + m_3 + m_6 \end{cases}$$

   C'est *l'algorithme de Strassen*. Quelle est sa complexité?

   Puisqu'on estime que le calcul d'un produit est (beaucoup) plus "coûteux" que le calcul d'une somme, on peut (considérablement) accélérer le calcul de AB par l'algorithme de Strassen—qui par ailleurs peut être généralisé aux matrices $n \times n$. C'est un sujet de recherche d'optimiser ainsi le calcul matriciel du produit (mais aussi du déterminant, de la factorisation LU, etc.), et à ce jour on ne sait pas s'il existe un algorithme optimal pour des matrices $n \times n$.

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 6: Exercices récapitulatifs

1. Ecrire le système linéaire suivant comme une équation matricielle, puis le résoudre:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

2. Donner une factorisation $PA = LU$ et la forme réduite des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Calculer le déterminant de dét $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ et celui de $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$ (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$).

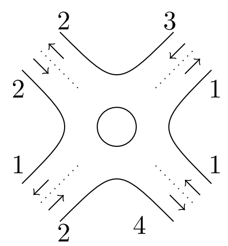
4. Montrer par récurrence sur n que le déterminant d'une matrice $n \times n$ dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair. En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

5. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ \lambda & 3 & 2 \end{pmatrix}$ soit inversible.

6. Pour chacune des matrices suivantes, donner une sous-matrice à colonnes libres ayant la même image ainsi qu'une matrice à colonnes libres engendrant le noyau. Déterminer les matrices inversibles, et – le cas échéant – calculer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Le schéma ci-dessous représente un rond-point, et les chiffres indiquent combien de voitures sont rentrées et sorties sur les quatre rues du rondpoint (en 10', disons). Déterminer combien de voitures sont passées dans chaque secteur (N, S, E, O) de ce rond-point.



Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 7: Distance et orthogonalité, moindres carrés

1. Calculer dans $\mathbb{R}^4$:

   (a) toutes les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $(1, \alpha, 3, 2\alpha)$ est orthogonal à $(-1, 3, 0, 2\alpha)$,

   (b) la distance entre $(1, 3, 2, 8)$ et $(4, 3, 2, 4)$,

   (c) la projection orthogonale de $(1, 2, 3, 4)$ sur le plan engendré par $(1, 0, 1, 1)$ et $(0, 1, 1, 0)$.

2. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 6 \\ 3 & -2 & 8 & -10 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Sachant que le rang de A n'est pas 4, calculer la projection orthogonale de P sur $\mathrm{Im}(A)$.

3. Ecrire les systèmes suivants comme une équation matricielle $AX = B$, calculer le rang de la matrice A des coefficients, observer qu'une solution exacte n'existe pas, puis les résoudre au sens des moindres carrés:

$$\text{(a)} \begin{cases} x - y &= 1 \\ x &= 0 \\ y &= 2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2x + y &= -1 \\ x + y &= 1 \\ -x + y &= 3 \\ y &= -1 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} 4x &= 2 \\ 2y &= 0 \\ x + y &= 11 \end{cases}$$

4. Faire un dessin dans le plan $\mathbb{R}^2$ des droites d'équations $y = x + 1$, $y = 3x + \frac{1}{2}$ et $y = -x + \frac{5}{2}$. Calculer les trois points d'intersection de cette configuration, ainsi que "*le point dans lequel les trois droites se coupent presque*" (avec la méthode des moindres carrés).

5. Soient les points $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$ du plan $\mathbb{R}^2$. On veut construire une droite qui passe "au plus près possible" de tous ces points. Sachant qu'une droite est donnée par une équation du type $y = ax + b$ (et donc on cherche à déterminer a et b), transformer ce problème en un problème de résolution de système linéaire au sens des moindres carrés, pour trouver la réponse.

6. Soient les points $(1, 3.8)$, $(2, 2.7)$, $(3, 1.4)$, $(4, 2.8)$, $(5, 3.6)$ du plan $\mathbb{R}^2$. Sur un dessin on remarque que ces points suivent approximativement une parabole. Sachant qu'une parabole est d'équation $y = ax^2 + bx + c$, trouver la parabole qui passe "le plus près possible" de ces points.

7. Généraliser les énoncés précédents: donner la procédure à suivre pour construire une fonction polynomiale $y = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$ de degré k dont le graphe passe "au plus près possible" de n points (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) du plan $\mathbb{R}^2$.

   Note: La technique décrite ci-dessus, relève de la discipline d'*ajustement de courbe* (ou *curve fitting*): on veut trouver l'équation polynomiale $y = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$ qui décrit "au mieux" la relation entre abscisses et ordonnées d'une série de données (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Si on choisit $k = 1$, et donc on cherche une droite $y = ax + b$, on parle d'un *modèle de régression linéaire*; pour le cas général on parle de *régression polynomiale*. On a vu précédemment que l'on peut toujours trouver un unique polynôme de degré $n - 1$ dont le graphe passe *exactement* par les n points donnés; c'est le polynôme d'*interpolation*. L'intérêt de la *régression* est donc de déterminer un polynôme de degré $k < n - 1$ dont le graphe passe *approximativement* par les n points donnés.

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 8: Gram-Schmidt, factorisation QR

1. Démontrer qu'une matrice carrée $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ à colonnes orthonormales est inversible. Quelle est sa matrice inverse? On appelle Q une *matrice orthogonale*. (Attention: cette terminologie historique prête à confusion!)

2. Identifier les matrices à colonnes orthogonales, les matrices à colonnes orthonormales, et les matrices orthogonales:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Prouver que la transposée d'une matrice orthogonale est orthogonale. Qu'en est-il pour le produit de deux matrices orthogonales? la somme de deux matrices orthogonales? un multiple scalaire d'une matrice orthogonale?

4. Montrer que le déterminant d'une matrice orthogonale est toujours ± 1.

5. Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et le quadruple $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le rang de A.

   (b) Par le procédé de Gram-Schmidt, donner une factorisation $A = QR$.

   (c) Montrer que $P \notin \mathrm{Im}(A)$ puis calculer la projection orthogonale de P sur $\mathrm{Im}(A)$.

   (d) Résoudre le système $AX = P$ au sens des moindres carrés.

6. Donner une factorisation $A = LU$ et une factorisation $A = QR$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Donner une factorisation $A = QR$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis résoudre le système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 9: Diagonalisation, factorisation BDB^{-1}

1. Montrer que, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonalisable, alors le déterminant de A est égal au produit de ses n valeurs propres. (On compte les valeurs propres avec leurs multiplicités.)

2. La trace d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est, par définition, la somme des éléments sur la diagonale de A. Prouver que, pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. En déduire que, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonalisable, alors la trace de A est égale à la somme de ses n valeurs propres. (On compte les valeurs propres avec leurs multiplicités.)

3. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 14 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$

4. Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, puis diagonaliser-la.

5. Donner – si possible – une diagonalisation de chacune des matrices suivantes:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Vérifier dans l'exercice ci-dessus que "toute matrice carrée A annule son propre polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$"; ce résultat est le *Théorème de Cayley-Hamilton* (mais sa démonstration va au-dela du contenu de ce cours).

7. Donner des factorisations $PA = LU$, $A = QR$ et $A = BDB^{-1}$ des matrices suivantes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

8. Calculer la puissance A^{100} de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Donner des formules explicites pour les termes des deux suites de nombres, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, définies récursivement par

$$\begin{cases} x_0 = 1000 \\ y_0 = 1000 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{i+1} = x_i + 4y_i \\ y_{i+1} = \dfrac{x_i}{2} \end{cases}$$

10. Si on pose $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \geq 0$, donner une formule explicite (non-récursive) pour f_n.

11. Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont le carré est I. Montrer que $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \{-1, 1\}$. Montrer que $-1 \in \mathrm{Spec}(A)$ si et seulement si $A \neq I$. (Indication: prendre $AX_0 \neq X_0$ et considérer $X_1 = AX_0 - X_0$.)

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 10: Matrices symétriques, factorisation BDB^t

1. Combien de matrices orthogonales de genre $n \times n$ à coefficients entiers y a-t-il?

2. Diagonaliser les matrices symétriques suivantes au moyen d'une matrice orthogonale:

   (a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Calculer des factorisations $A = LU$, $A = QR$ et $A = BDB^t$ de la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Montrer qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique si et seulement si, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, le produit scalaire de X avec AY est égal au produit scalaire de AX avec Y.

5. On veut montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, l'expression $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 7y^2$ est strictement positive.

   (a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que les valeurs propres de cette matrice A sont strictement positives.

   (c) Utiliser la diagonalisation de A pour reformuler l'expression donnée comme une somme pondérée de carrées.

   (d) Conclure.

6. Etudier le signe de l'expression $f(x, y, z) = x^2 + \dfrac{y^2 + z^2}{2} + 3yz$.

7. Determiner les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour que l'expression $x^2 + y^2 + z^2 + 2a(xy + yz)$ garde un signe constant.

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 11: Valeurs singulières, factorisation USV^t

1. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ puis en déduire qu'elle n'est pas de la forme A^tA.

2. Calculer les valeurs singulières de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, puis en donner une factorisation par valeurs singulières, soit $A = USV^t$. Montrer que $\text{rang}(A) = 2$ puis donner la meilleure approximation de A par une matrice de rang 1.

3. Calculer des factorisations LU et SVD des matrices suivantes:

   (a) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

4. Pour comprimer une matrice $m \times n$ par un facteur 4 par le procédé des valeurs singulières, quel sera le rang de la matrice approchée?

5. Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3y}{2} = 3 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ -\dfrac{3x}{2} + \dfrac{3y}{2} = 0 \end{cases}$$

   (a) Ecrire le système sous forme matricielle $AX = B$, calculer le rang de A et montrer que le système n'admet pas de solution exacte.

   (b) Calculer la SVD de la matrice des coefficients du système, soit $A = USV^t$.

   (c) Calculer la matrice pseudo-inverse de A, soit $A^+ = VS^+U^t$.

   (d) Utiliser A^+ pour calculer une solution approchée au sens des moindres carrées du système donné.

6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer sa factorisation SVD, soit $A = USV^t$.

   (b) Calculer sa pseudo-inverse $A^+ = VS^+U^t$.

   (c) Vérifier que A^+ est la matrice inverse de A.

Algèbre linéaire – L2 Informatique – 2018-2019

Responsable: Isar Stubbe

Fiche 12: Exercices récapitulatifs

1. Montrer que le système suivant ne possède pas de solution exacte, puis calculer une solution approchée au sens des moindres carrées:
$$\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ x + y = 1 \\ 4x + 5y = 8 \end{cases}$$

2. Déterminer l'équation de la droite dans le plan $\mathbb{R}^2$ passant au plus près des points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$.

3. Appliquer Gram-Schmidt à la suite $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, en déduire une factorisation $A = QR$ de la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$, puis calculer la projection orthogonale de $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sur l'espace engendré par les colonnes de A.

4. Lesquelles des matrices suivantes sont diagonalisables?
$$A = \begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 4\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}3 & 1 & \sqrt{2}\\1 & 2 & 4\\\sqrt{2} & 4 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\4 & 2 & 0 & 0\\-3 & 1 & -1 & 0\\8 & 3 & -2 & 3\end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\4 & 2 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & -1 & 0 & 0\\2 & 3 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5. Diagonaliser $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible.

6. Diagonaliser la matrice symétrique $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 3 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ au moyen d'une matrice orthogonale.

7. Donner une factorisation LU et une factorisation USV^t de $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 2 & -2\end{pmatrix}$.