Définition algébrique des cellules non-strictes : Version Batanin.

Kamel Kachour

Résumé de la conférence.

Les cellules non-strictes ont été définis sous un angle algébriques dans [1], et ces définitions constituent en elles même la suite logique des ∞-catégories non-strictes de Jacques Penon. A présent nous proposons d'exposer une autre définition algébrique des cellules non-strictes, qui doivent constituer la suite logique des ∞-catégories non-strictes de Michael Batanin.

Ce sont les T-catégories, inventé par Albert Burroni en 1971 [2], qui organisent toutes ces constructions. Tom Leinster puis Claudio Hermida redécouvrent les T-catégories respectivement en 1998[3] puis en 2000[4].Les T-catégories de cet exposé sont construites avec la monade cartésienne des ∞-catégories strictes T et sont une variante globulaire et non-symétrique des opérades colorés. Ces opérades apparaissent comme les candidates naturelles pour produire les cellules non-strictes de Batanin. Par référence à leur premier inventeur nous les appellerons les opérades de Burroni.

Dans [5] Michael Batanin construit ces ∞-catégories non-strictes avec une opérades contractiles munis d'un système de composition. Nous adoptons le même point de vue en considérant une infinité dénombrable d'opérades de Burroni, qui seront également contractile et chacune munis d'un système d'opérations (ces derniers étant la suite logique du système de composition de Batanin).

Comme Batanin on fait le choix de les prendre initiales, d'autant plus que cette initialité ce révèle fondamentale pour construire les sources et buts de l'∞-graphes sous-jacents de la probable ∞-catégorie non-stricte des ∞-catégories non-strictes de Batanin. Cette construction procède en quatre grandes étapes : On construit un co-∞-graphe de systèmes d'opérations bicolorés, puis un co-∞-graphe d'opérades de Burroni, qui vont donner successivement un ∞-graphe dans la catégorie des catégories munis d'une monade, puis l'∞-graphe des algèbres souhaité grâce au foncteur d'Eilenberg-Moore. Ces algèbres vont contenir toutes les cellules non-strictes de Batanin: Les ∞-foncteurs non-strictes, les ∞-transformations naturelles non-strictes, les ∞-modifications non-strictes, etc. L'ingrédient fondamental de ces constructions est l'utilisation de deux couleurs : Ainsi par exemple on utilise des systèmes d'opérations bicolorés, qui renferment les symboles d'opérations des cellules non-strictes, et l'action des monades des cellules non-strictes se férat sur des ∞-graphes bicolorés. Par exemple le système d'opérations des 1-cellules non-strictes (i.e. des ∞-foncteurs non-strictes) renferme d'une part deux fois les symboles d'opérations des ∞-catégories non-strictes chacun

ayant une couleur différente (qui déterminera les ∞-catégories non-strictes sources et buts), d'autre par les symboles de foncteurs dont l'arité et la co-arité sont de couleurs différentes, et enfin il renferme le pointage opéradique bicoloré. La bicoloration se fait avec la somme T(1)+T(1) pour les arités globulaires et avec la somme 1+1 pour les co-arités, où 1 désigne l'-∞-graphe final.

Dans l'ésprit de ces constructions, c'est une opération à deux couleurs qui est au coeur des ∞-foncteurs non-strictes, et on a le même phénomène pour les ∞-transformations naturelles non-strictes, les ∞-modifications non-strictes, etc.

Les promesses de ces constructions sont tenues pour la dimension 2 : On démontre que les 2-foncteurs faibles obtenues sont des pseudo-2-foncteurs et que les 2-transformations naturelles faibles obtenues sont des pseudo-2-transformations naturelles.

References

[1] Kamel Kachour, *Définition algébrique des cellules non-strictes*, Cahiers de Topologie et de Géométrie Différentielle Catégorique 1 (2008) 1-68.

[2] Albert Burroni, *T-catégories(catégories dans un triple)*, Cahiers de Topologie et de Géométrie Différentielle Catégorique 12 (1971) 215-321.

[3] Tom Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol 298(2004).

[4] Claudio Hermida, *Representable multicategories*, Advances in Mathematics 151 (2000) 164-225.

[5] Michael Batanin, *Monoidal Globular Categories as a Natural Environment for the theory of Weak-n-Categories* , Advances in Mathematics 136 (1998) 39-103.