COURS DE MATHEMATIQUES 4 - ANALYSE

Licence 1

N. CHENAVIER

Table des matières

Chapitre 1

Dérivation

Sommaire

1.1 Dérivée d'une fonction

En pratique, les domaines de définition des fonctions que nous considérons sont des intervalles ou des réunions d'intervalles. Nous nous limitons dans les énoncés au cas où les fonctions sont définies sur un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbf{R}$. On désigne ci-dessous par I un tel intervalle, c'est-à-dire de la forme :

- $I =]a, b[$, avec $a < b$;
- $I =]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbf{R}$;
- $I =]-\infty, b[$, avec $b \in \mathbf{R}$.

Etant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}$, les énoncés peuvent en fait se généraliser à des fonctions définies sur un voisinage de x_0, c'est-à-dire sur un intervalle contenant x_0.

Définition 1.1.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. On appelle **dérivée** de f en x_0 la valeur de cette limite :*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemple 1.1.2.
1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$ et soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Alors f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = 2x_0$.
2. Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ l'application définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $x_0 \in]0, +\infty[$. Alors f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Graphiquement, une fonction est dérivable en un point x_0 si la courbe représentative de la fonction est "lisse" au voisinage de x_0. Dans ce cas, cette courbe admet une tangente.

Définition 1.1.3. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $x_0 \in I$. Supposons que f soit dérivable en x_0. On appelle **tangente** à la courbe associée à f en le point d'abscisse x_0 la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$.*

Proposition 1.1.4. *Sous les mêmes conditions que la définition ci-dessus, la tangente admet pour équation*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exemple 1.1.5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 1$ est $y = 2x - 1$.

Définition 1.1.6. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si*

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Proposition 1.1.7. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Remarque 1.1.8.

1. Il existe des fonctions continues en un point x_0 mais non dérivable en x_0. Par exemple, l'application $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
2. En pratique, lorsqu'une fonction f n'est pas dérivable en un point x_0, on est dans l'une des configurations suivantes :
   - f *n'est pas continue* en x_0 (exemple : la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en $x_0 = 0$) ;
   - f *admet un point singulier* (exemple : la fonction f définie par $f(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ n'est pas continue en $x_0 = 0$) ;
   - f *admet une tangente verticale* (exemple : la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ n'est pas continue en $x_0 = 0$).

Définition 1.1.9. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.*
2. *Si f est dérivable sur I, on appelle **dérivée** de f la fonction $f' : I \to \mathbf{R}, x \mapsto f'(x)$.*

Exemple 1.1.10. Si f désigne la fonction définie par $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$, alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$.

En pratique, pour étudier la dérivabilité et calculer la dérivée d'une fonction, on commence par étudier la dérivabilité d'un point de vue "global" et on calcule la dérivée à partir de théorèmes généraux (dérivées de fonctions usuelles, opérations sur les dérivées). Si nécessaire, on étudie également la dérivabilité d'un point de vue "local" en d'éventuels points à partir du taux d'accroissement.

Dérivées de fonctions usuelles

Le tableau suivant rassemble les dérivées connues de diverses fonctions usuelles.

Domaine de définition	$f(x)$	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$\mathbf{R}$	c	$\mathbf{R}$	0
$\mathbf{R}$	x^n $(n \in \mathbf{N})$	$\mathbf{R}$	nx^{n-1}
$\mathbf{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbf{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbf{R}$	$\cos x$	$\mathbf{R}$	$-\sin x$
$\mathbf{R}$	$\sin x$	$\mathbf{R}$	$\cos x$
$\mathbf{R}$	$\exp(x)$	$\mathbf{R}$	$\exp(x)$
$\mathbf{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$[-1, 1]$	$\arccos x$	$]-1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1, 1]$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbf{R}$	$\arctan x$	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

TABLE 1.1 – Dérivées de fonctions usuelles

Opérations algébriques

Les propriétés suivantes fournissent une méthode pratique pour calculer la dérivée d'une fonction à partir des dérivées des fonctions usuelles.

Sommes, produits et quotients

Proposition 1.1.11. *(i) Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable et soit c un nombre réel. Alors, pour tout $x \in I$, on a :*

$$(f + c)'(x) = f'(x), \quad (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x).$$

(ii) Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

De plus, si $g(x) \neq 0$, on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Exemple 1.1.12. 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^4 + 3x^2 + e^x$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $f'(x) = 4x^3 + 6x + e^x$.

2. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \left(3x^2 + \sqrt{x}\right) \sin x$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \sin x - (3x^2 + \sqrt{x}) \cos x$.
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

Composées

Définition 1.1.13. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J. On appelle **composée** de g et de f la fonction notée $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in I$.*

Proposition 1.1.14. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalles ouverts I et J respectivement. Alors $g \circ f$ est dérivable et, pour tout $x \in I$, on a :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Par abus de notations, on écrira ci-dessous $(g(f(x)))' := (g \circ f)'(x)$. En d'autres termes, la dérivée de la fonction $x \mapsto g(f(x))$ est donnée par $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Remarque 1.1.15. On obtient les cas particuliers suivants :

1. Si $f : I \to \mathbf{R}_+^*$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I et
$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x).$$
2. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \exp(f(x))$ est dérivable sur I et
$$(\exp(f(x)))' = \exp(f(x)) \times f'(x).$$
3. Si $f : I \to \mathbf{R}_+^*$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est dérivable sur I et
$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$
4. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \cos(f(x))$ est dérivable sur I et
$$(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \times f'(x).$$
5. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \sin(f(x))$ est dérivable sur I et
$$(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \times f'(x).$$

Exemple 1.1.16. 1. Soit $f : \mathbf{R} \to [0, 1], x \mapsto \sin(x^2)$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $f'(x) = \cos(x^2) \times (x^2)' = 2x \cos(x^2)$.

2. Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*, x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbf{R}$. La fonction f s'écrit sous la forme suivante :
$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$
D'après la proposition ci-dessus, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Dérivée à droite et à gauche

Dans la définition 1.1.1, le h est non nul et tend vers 0 par valeurs positives (par la droite) ou par valeurs négatives (par la gauche). Ceci motive la définition suivante.

Définition 1.1.17. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$. On dit que f est **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) si la limite suivante existe :*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \left(\textit{respectivement } \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right).$$

Proposition 1.1.18. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 et*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

1.2 Principaux théorèmes

Théorème 1.2.1. *(Rolle) Soient $a < b$ deux nombres réels. Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe (au moins) un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Exemple 1.2.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$. Prenons $a = -1$ et $b = 1$. Le nombre réel c est ici unique et est égal à 0.

Théorème 1.2.3. *(Accroissements finis) Soient $a < b$ deux nombres réels. Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe (au moins) un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Nous donnons ci-dessous des applications de la notion de dérivation. Le théorème suivant est une conséquence du théorème 1.2.3 et fournit une méthode pratique pour déterminer le sens de variations d'une fonction dérivable.

Théorème 1.2.4. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors :*

(i) f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \geq 0$;

(ii) f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \leq 0$;

(iii) f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 0$.

Exemple 1.2.5.
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$. Alors f est croissante sur $]-\infty, 1]$, décroissante sur $[-1, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Alors f est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$.

Remarque 1.2.6. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$ et $f(x_0) = g(x_0)$ pour un certain $x_0 \in I$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.

Le théorème suivant traite des fonctions strictement monotones.

Théorème 1.2.7. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable.*

(i) si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante ;

(ii) si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.

Remarque 1.2.8. La réciproque du théorème ci-dessus n'est pas vraie : il existe des fonctions strictement monotones dont la dérivée peut s'annuler. Par exemple, la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ est strictement croissante mais sa dérivée s'annule en 0.

Une autre application de la notion de dérivation concerne le calcul de certaines limites.

Proposition 1.2.9. *(règle de l'hôpital) Soient f et g deux fonctions dérivables sur I, et soit $x_0 \in I$. Supposons que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $g'(x_0) \neq 0$. Alors*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Exemple 1.2.10. Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Puisque $f(0) = g(0) = 0$ et puisque $g'(0) = 1 \neq 0$, la règle de l'hôpital s'applique et l'on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

1.3 Dérivées successives

Définition 1.3.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Si la fonction f' admet une dérivée, on appelle **dérivée seconde** de f la quantité $f'' = (f')'$.*

Exemple 1.3.2. Prenons f la fonction définie par $f(x) = e^{x^2}$. Alors $f'(x) = 2xe^{x^2}$ et $f''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

De proche en proche, et sous réserve d'existence, on peut définir la **dérivée n-ième** de f. On la note $f^{(n)}$.

Exemple 1.3.3. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ et $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \geq 4$.

Définition 1.3.4. *(fonction continument dérivable) Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction.*

*(i) On dit que f est **continument dérivable** sur I si f est dérivable sur I et si f' est de plus continue. On dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$.*

*(ii) Plus généralement, étant donné un entier $n \geq 1$, on dit que f est **n-fois continument dérivable** ou de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*

Si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple 1.3.5. 1. Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Les fonctions cos, sin, exp, ln sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs domaines de définition.

Contre-exemple 1.3.6. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Chapitre 2

Développements limités, formules de Taylor

Sommaire

Dans ce chapitre, on considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$.

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application et soit $x_0 \in I$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n en x_0 s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que la fonction $R : I \to \mathbf{R}$ définie par*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + R(x)$$

satisfait la propriété suivante :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{2.1.1}$$

- La quantité

$$P_n(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

  s'appelle la **partie régulière** (P_n étant un polynôme de degré au plus n).
- La fonction R s'appelle le **reste**.

On écrit alors que f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$. Il est d'usage d'adopter la notation $o((x - x_0)^n)$ pour désigner le reste. En d'autres termes, (2.1.1) se réécrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Plus généralement, on utilise la notation suivante :

Notation 2.1.2. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on utilisera la notation $f = o(g)$.*

Proposition 2.1.3. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application et soit $x_0 \in I$.*

(i) Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors la partie régulière de ce développement est unique.

(ii) Si f est une fonction paire, alors tous les coefficients d'indice impair de la partie régulière du développement en 0 sont nuls.

(iii) Si f est une fonction impaire, alors tous les coefficients d'indice pair de la partie régulière du développement en 0 sont nuls.

2.2 Formules de Taylor

Théorème 2.2.1. *(Formule de Taylor-Young) Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application et soit $x_0 \in I$. Supposons que f soit n-fois dérivable sur I, où $n \geq 1$. Alors f admet un $DL_n(x_0)$ et, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \tag{2.2.1}$$

L'identité (2.2.1) s'appelle le **développement de Taylor-Young de f en x_0 à l'ordre n.**

Théorème 2.2.2. *(Formule de Taylor-Lagrange) Soient $a < b$ deux nombres réels, $n \geq 0$ et f une application. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Théorème 2.2.3. *(Inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $a < b$ deux nombres réels, $n \geq 0$ et f une application. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Alors*

$$\left| f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n \right| \leq \frac{\sup_{x \in]a,b[} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}.$$

2.3 Développements limités de fonctions usuelles

Dans cette section, on donne quelques exemples de développements limités en $x_0 = 0$.

Développements limités obtenus par Taylor-Young

Proposition 2.3.1. *(i) Fonction exponentielle : pour tout $x \in \mathbf{R}$*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

(ii) Fonction puissance : pour tout $x > -1$ et pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

(iii) Fonction cosinus : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p+1}).$$

(iv) Fonction sinus : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+2}).$$

Exemple 2.3.2. 1. Le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

et le $\mathrm{DL}_2(0)$ est

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Application numérique : prenons $x = 0.1$. On a
- $\sqrt{1+x} = \sqrt{1.1} \simeq 1.04881$;
- $1 + \frac{1}{2}x = 1 + \frac{0.1}{2} = 1.05$ (approximation à l'ordre 1) ;
- $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 = 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.1^2}{8} = 1.04875$ (approximation à l'ordre 2).

2. Le $\mathrm{DL}_1(0)$ de sin est

$$\sin(x) = x + o(x)$$

et le $\mathrm{DL}_3(0)$ est

$$\sin(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Application numérique : prenons $x = 0.1$. On a
- $\sin(x) = \sin(0.1) \simeq 0.0998334$;
- $x = 0.1$ (approximation à l'ordre 1) ;
- $x - \frac{1}{6}x^3 = 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.0998333$ (approximation à l'ordre 3).

Autres développements limités

Proposition 2.3.3. *(i) Fonctions inverses : pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

(ii) Fonction logarithme : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots - \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n).$$

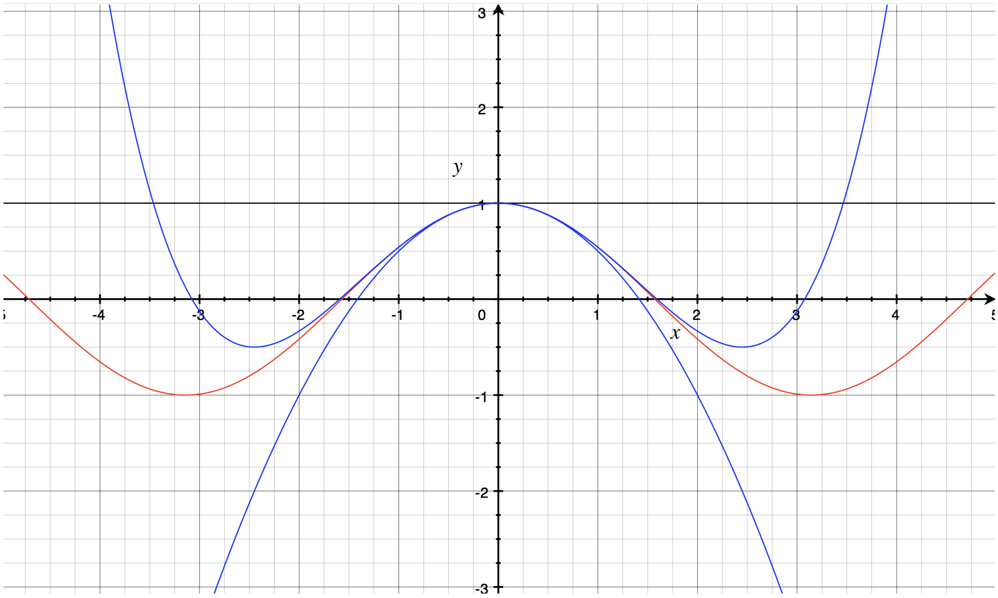

FIGURE 2.1 – courbes représentative du cosinus et parties régulières de ses développements limités à l'ordre 0 (noir) et 2 et 4 (bleu).

A titre d'illustration, la figure 2.1 représente la fonction cosinus en rouge ainsi que les parties régulières des développements limités en 0 à l'ordre 0 (en noir) puis ceux d'ordre 2 et 4 en bleu. Plus l'ordre du développement limité est élevé, plus la courbe représentative de la partie régulière est proche de celle de la fonction cosinus.

2.4 Opérations sur les développements limités

L'utilisation de la formule de Taylor-Young pour trouver des développements limités n'est, en pratique, intéressante que dans de rares cas. Dans la pratique, on obtient le plus souvent les développements limités recherchés comme produits, sommes, quotients et compositions de développements usuels.

Somme

Proposition 2.4.1. *Soient $x_0 \in \mathbf{R}$, $n \geq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. Supposons que f et g admettent des $DL_n(x_0)$, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et des polynômes P_n, Q_n de degré inférieur ou égal à n tels que, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

Alors $f + g$ et λf admettent des $DL_n(x_0)$. De plus, pour tout $x \in I$, on a :

$$(f + g)(x) = (P_n + Q_n)(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

et

$$\lambda f(x) = (\lambda P_n)(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

Exemple 2.4.2. 1. Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^x + \sin x$ est

$$e^x + \sin x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

2. Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ est

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} + o(x^3).$$

Produit

Proposition 2.4.3. *Soient $x_0 \in \mathbf{R}$, $n \geq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. Supposons que f et g admettent des $DL_n(x_0)$, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et des polynômes P_n, Q_n de degré inférieur ou égal à n tels que, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

Alors fg admet un $DL_n(x_0)$. De plus, pour tout $x \in I$, on a :

$$fg(x) = [P_n Q_n]_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n),$$

où $[PQ]_n$ désigne la restriction de tous les termes de degré inférieur ou égal à n dans le polynôme PQ.

Exemple 2.4.4. 1. Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sin x$ est [1]

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{36}x^6 + o(x^3) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

2. Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$ est [2]

$$\cos(x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Composition

Proposition 2.4.5. *Soient $x_0 \in \mathbf{R}$ et $n \geq 0$. Soit f une fonction définie au voisinage admettant un $DL_n(x_0)$ de partie régulière P_n et telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Soit g une fonction définie au voisinage de y_0 admettant un $DL_n(y_0)$ de partie régulière Q_n. Alors $g \circ f$ admet un $DL_n(x_0)$ dont la partie régulière est donnée par $[Q_n \circ P_n]_n$.*

Exemple 2.4.6. 1. Calculons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^{\sin x}$. Pour cela, on utilisera les $\mathrm{DL}_3(0)$ des fonctions exponentielle et sinus. On a

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

1. Il suffit de faire un $\mathrm{DL}_2(0)$ de exp
2. Il suffit de faire un $\mathrm{DL}_1(0)$ de cos

Donc

$$e^{\sin x} = e^{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}.$$

Or $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$. Donc, en posant $u = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, on a

$$\begin{aligned} e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3\right). \end{aligned}$$

En développant, cela donne

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

2. Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ est

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Quotient

Proposition 2.4.7. *Soient $x_0 \in \mathbf{R}$, $n \geq 0$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. Supposons que f et g admettent des $DL_n(x_0)$, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et des polynômes P_n, Q_n de degrés inférieurs ou égaux à n tels que, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \textit{et} \quad g(x) = Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n),$$

avec $Q_n(x_0) \neq 0$ (c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$). Alors f/g admet un $DL_n(x_0)$.

Nous ne donnons pas de formule générale donnant l'expression de la partie régulière du quotient mais illustrons le concept avec un exemple.

Exemple 2.4.8. 1. Calculons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \frac{e^x}{\cos x}$. On sait que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On a donc

$$\frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^x}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}.$$

En posant $u = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et en utilisant le fait que $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$ on a donc

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{\cos x} &= e^x\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 + x + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

2. Calculons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x}$. On sait que

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

et

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

On a donc

$$\frac{\sin x}{e^x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}.$$

En posant $u = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ et en utilisant le fait que $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{e^x} = \Big[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big]\Big[1 - \Big(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big) + \Big(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^2 \\ - \Big(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^3 + o\Big(\Big(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^3\Big)\Big].\end{aligned}$$

En développant, cela donne

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{e^x} &= \Big[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big]\Big[1 - \Big(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\Big) + \Big(x^2 + x^3\Big) - x^3 + o(x^3)\Big] \\ &= \Big[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big]\Big[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big] \\ &= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

3. Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ est

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 + o(x^3).$$

2.5 Applications

Recherche de limites

Puisque les développements limités permettent l'étude de fonctions au voisinage d'un point, ils peuvent être utiles pour la recherche de limites. On donne ci-dessous quelques exemples.

Exemple 2.5.1. 1. On souhaite déterminer si la limite de $\frac{1-\cos x}{x^2}$, quand x tend vers 0, existe et le cas échéant la calculer. Pour cela, il suffit de faire un $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos. On a

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

Ceci montre que la limite existe et que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2. On souhaite déterminer si la limite de $\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$, quand x tend vers 0, existe et le cas échéant la calculer. Pour cela, il suffit de faire un $\mathrm{DL}_1(0)$ de sin et de $x \mapsto \ln(1+x)$. On a [3]

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\ln(1+x)} &= \frac{x+o(x)}{x+o(x)} \\ &= 1+o(1).\end{aligned}$$

Ceci montre que la limite existe et que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1$.

3. On souhaite déterminer si la limite de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, quand x tend vers $+\infty$, existe et le cas échéant la calculer. Pour cela, on écrit que

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} &= \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} \\ &= \sqrt{x}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/2}\right) \\ &= \sqrt{x}\left(\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

Ceci montre que la limite existe et que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = 0$.

Application à l'étude d'une courbe au voisinage d'un point

Un DL_1 peut être considéré comme une approximation linéaire de la fonction. En d'autres termes, il nous donne de l'information sur la tangente à la courbe représentative de la fonction.

Proposition 2.5.2. *Soient $x_0 \in \mathbf{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un $DL_1(x_0)$. De plus, si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + o(x-x_0)$, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = a_0 + a_1(x-x_0)$.*

Remarque 2.5.3. Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + o(x-x_0)$ alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f, au point d'abscisse x_0, est $y = a_0 + a_1(x-x_0)$.

Pour avoir la position relative de la courbe par rapport à la tangente, il faut prendre des termes d'indices plus élevés dans le développement. Voici un exemple.

Exemple 2.5.4. Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/3}$. On remarque que la tangente à la courbe représentative de f en $(0,0)$ a pour équation $y = \frac{1}{6}x$. Pour avoir la position relative de la courbe par rapport à la tangente, on effectue un $\mathrm{DL}_2(0)$. Cela donne

$$f(x) = \frac{1}{6}x - \frac{17}{72}x^2 + o(x^2).$$

En particulier, au voisinage de 0, on a $f(x) \leq \frac{1}{6}x$. La courbe de f se situe en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

3. Remarquons que le résultat final est bien $1+o(1)$ et non 1. En effet, les $o(x)$ apparaissant de part et d'autre de la fraction désignent des fonctions qui, divisées par x, tendent chacune vers 0, mais qui ne sont pas identiques. Une autre façon de rédiger aurait été : $\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \frac{x+x\varepsilon_1(x)}{x+x\varepsilon_2(x)} = 1+\varepsilon_3(x)$.

Chapitre 3

Intégration

Sommaire

Dans ce qui suit, on considère un intervalle fermé borné $[a, b]$, avec $a < b$.

3.1 Aire et intégrale

Intégrale d'une fonction positive

Définition 3.1.1. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a, b]$. On appelle* ***intégrale*** *de f sur l'intervalle $[a, b]$ l'aire de la surface S délimitée :*

- *à gauche par a et à droite par b ;*
- *au-dessus par la courbe de f et en-dessous par l'axe des abscisses.*

On désigne cette quantité par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. En d'autres termes (la fonction f étant positive), on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \mathcal{A}(S).$$

Les quantités a et b s'appellent les **bornes** de l'intégrale.

Exemple 3.1.2.
1. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors, la surface S est un carré et l'on a : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$.
2. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 3$ et $f(x) = 2 + x$ sur l'intervalle $[0, 3]$. Alors, la surface S est un trapèze et l'on a : $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 (2 + x)\mathrm{d}x = 6 + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$.

Proposition 3.1.3. *Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $I = [a, b]$. Pour tout $n \geq 1$, posons*

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Cas général

Définition 3.1.4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$. On appelle :*

(i) ***partie positive*** *de f l'application f_+ définie par*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } f(x) \geq 0; \\ 0 & \textit{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

(ii) ***partie négative*** *de f l'application f_- définie par*

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } f(x) \geq 0; \\ -f(x) & \textit{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Remarque 3.1.5. Les fonctions f_+ et f_- sont toutes les deux positives et $f = f_+ - f_-$.

Définition 3.1.6. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a,b]$. On appelle* ***intégrale*** *de f sur l'intervalle $[a,b]$ la quantité*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b f_+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_-(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 3.1.7. Considérons le cas où $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Alors $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 3.1.8.

1. La quantité $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ doit être interprétée comme l'aire algébrique de la surface délimitée à gauche et à droite par a et b respectivement, et comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.
2. On dit que x est une variable muette, au même titre que l'indice i d'une somme $\sum_i$ indexée par i. En particulier, on peut utiliser n'importe quelle autre lettre pour désigner la variable d'intégration, par exemple :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = \cdots$$

3. La notation "dx" a pour origine la largeur des rectangles qui ont été utilisés dans les premiers calculs d'approximation, cette largeur multipliant les valeurs prises par la fonction.

Proposition 3.1.9. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors*

(i)

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0;$$

(ii) relation de Chasles : pour tout $c \in [a,b]$, on a

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(iii) linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

et, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(iv) si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

(v) inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

En accord avec ces propriétés, lorsque les bornes d'intégration sont inversées, il convient de poser $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3.2 Primitives

On introduit ci-dessous la notion de primitives. Cette notion fournira un procédé pratique pour calculer des intégrales de fonctions continues. On limite les énoncés au cas où les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Définition 3.2.1. *Soit I un intervalle et soient f et F deux fonctions définies sur I. On dit que F est une **primitive** de f si F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Exemple 3.2.2.
1. Considérons le cas où $f(x) = 3x^2 - x$. Alors les fonctions définies par $F_1(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ et $F_2(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ sont des primitives de f.
2. Considérons le cas où $f(x) = x^3 + \sin(x)$. Alors les fonctions définies par $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - \cos(x)$ et $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - \cos(x) + 8$ sont des primitives de f.

Pour calculer les primitives, le procédé est analogue à celui de la dérivation : on décompose une fonction f en des fonctions usuelles ; on détermine les primitives de ces fonctions usuelles et on en déduit les primitives de la fonction f en effectuant des opérations algébriques.

Primitives de fonctions usuelles

Remarque 3.2.3. On désigne ci-dessous par f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Une fonction de la forme $f' \times f^n$, avec $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$ a pour primitives toute fonction de la forme $\frac{1}{n+1}f^{n+1} + c$.
- Une fonction de la forme $\frac{f'}{\sqrt{f}}$ a pour primitives toute fonction de la forme $2\sqrt{f} + c$.
- Une fonction de la forme $\frac{f'}{f}$ a pour primitives toute fonction de la forme $\ln(|f|) + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times e^f$ a pour primitives toute fonction de la forme $e^f + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times \sin(f)$ a pour primitives toute fonction de la forme $-\cos(f) + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times \cos(f)$ a pour primitives toute fonction de la forme $\sin(f) + c$.

Domaine de définition	Fonction	Primitive
$\mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$)	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\mathbf{R}_+^*$	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x} + c$
$\mathbf{R}^*$	$f(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{x} + c$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \exp(x)$	$F(x) = \exp(x) + c$
$\mathbf{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\|x\|) + c$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$
$\mathbf{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$]-1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arccos x$
$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
$\mathbf{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan x$

TABLE 3.1 – Primitives de fonctions usuelles

Résultats généraux

Proposition 3.2.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Supposons que f et g admettent des primitives, notées F et G. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ possède une primitive donnée par $\alpha F + \beta G$.*

Remarque 3.2.5. La proposition 3.2.4 n'est pas vraie si on remplace la somme par un produit : une primitive de $f \times g$ n'est pas $F \times G$. En général, pour déterminer une primitive d'un produit de fonctions, il faut utiliser la formule de dérivation d'une composée : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Théorème 3.2.6. *(Théorème fondamental de l'analyse) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.*

(i) La fonction $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

(ii) La fonction f possède une infinité de primitives sur l'intervalle $[a, b]$ et ces dernières diffèrent toutes d'une constante additive.

3.3 Calculs d'intégrales à partir de primitives

Proposition 3.3.1. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. Soit F une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Remarque 3.3.2. 1. Si G est une autre primitive de f, on a également $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$. L'intégrale semble dépendre du choix de la primitive, c'est-à-dire de F ou de G. En fait, le calcul de l'intégrale est bien indépendant du choix de la primitive car on a $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ pour toutes primitives F et G puisque les fonctions F et G diffèrent seulement d'une constante.

2. En particulier, pour calculer une intégrale, il suffit de choisir une et une seule primitive de la fonction f.

Exemple 3.3.3. 1. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^1 (x^2 + 3x)\mathrm{d}x$: celle-ci a bien un sens puisque la fonction f définie $f(x) = x^2 + 3x$ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Une primitive de la fonction f est donnée par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$. En particulier,

$$\int_0^1 (x^2 + 3x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{3}{2} \times 1^2\right) - \left(\frac{1}{3} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2\right) = \frac{11}{6}.$$

2. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x$. Pour déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2(x)$, l'idée est de "linéariser" le $\cos^2$. Plus précisément, en utilisant des formules usuelles de trigonométrie, on sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. En particulier, on a $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$. Une primitive de la fonction $\cos^2$ est donnée par $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$. On obtient donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

3.4 Formules d'intégration

Dans cette section, on fournit deux méthodes pratiques pour calculer des intégrales.

Théorème 3.4.1. *(Intégration par parties) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, avec $a < b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 3.4.2. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\mathrm{d}x$. Pour cela, on effectue une intégration par parties en posant $f(x) = x$ et $g(x) = -\cos(x)$. Cela donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x = [x \times (-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos(x))\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Théorème 3.4.3. *(Changement de variables) Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et soit $\varphi : [a, b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, avec $a < b$. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 3.4.4. Informellement, l'idée du changement de variables est de poser $x = \varphi(t)$. En particulier, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$. En remplaçant x par $\varphi(t)$ et $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\mathrm{d}t$ dans l'intégrale, on obtient alors que $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 3.4.5. 1. On souhaite calculer l'intégrale suivante : $\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $f(x) = 2x\cos(x^2)$ et on considère le changement de variables :

$$\begin{aligned} \varphi : &\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^* \\ &t \mapsto \sqrt{t} =: x. \end{aligned}$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Concernant les bornes d'intégration, on prend $\varphi(a) = \sqrt{\pi}$, $\varphi(b) = 2\sqrt{\pi}$, $a = \pi$ et $b = 4\pi$. Par changement de variables, on obtient :

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{4\pi} 2\sqrt{t}\cos(t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{4\pi} \cos(t)\mathrm{d}t = 0.$$

2. On souhaite calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et on considère le changement de variables :

$$\begin{aligned} \varphi : &\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to [0,1] \\ &t \mapsto \sin(t) =: x. \end{aligned}$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $\varphi'(t) = \cos(t)$. Concernant les bornes d'intégration, on prend $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$, $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. Par changement de variables, on obtient :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \times \cos(t)\mathrm{d}t.$$

En remarquant que $1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$ et donc que $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|$, on en déduit que :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \times \cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$