COURS D'INTEGRATION ET SERIES DE FOURIER

Licence 3

N. CHENAVIER

Table des matières

Chapitre 1

Intégrale de Riemann

Sommaire

1.1 Intégrales des fonctions en escalier

Fonctions en escalier

Définition 1.1.1. *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.*

(i) On appelle ***subdivision*** *S de $[a,b]$ toute famille finie ordonnée $\{x_i\}_{0\le i\le n}$ de $[a,b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.*

(ii) On appelle ***pas*** *de la subdivision la quantité*

$$\rho(S) = \max_{0\le i\le n}(x_{i+1} - x_i).$$

Exemple 1.1.2. 1. Les quantités $S_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $S_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, $S_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ et $S_4 = \{0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\}$ sont des subdivisions de $[0,1]$. Leurs pas respectifs sont $\rho(S_1) = \frac{1}{2}$, $\rho(S_2) = \frac{1}{4}$, $\rho(S_3) = \frac{1}{3}$ et $\rho(S_4) = \frac{2}{5}$.

2. La subdivision uniforme sur $[a,b]$ est celle de points $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $0 \le i \le n$. Elle est de pas $\rho(S) = \frac{b-a}{n}$.

Définition 1.1.3. *Soient S et S' deux subdivisions de $[a,b]$. La subdivision S' est dite* ***plus fine*** *que S si $S \subset S'$.*

Exemple 1.1.4. Considérons les subdivisions $S = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ et $S' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ de $[0,1]$. La subdivision S' est plus fine que la subdivision S.

Définition 1.1.5. *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle* ***fonction en escalier*** *sur $[a,b]$ toute fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ bornée telle qu'il existe une subdivision $S = (x_i)_{i\le n}$ de $[a,b]$, avec f constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. En d'autres termes, pour tout $i \le n-1$, il existe un nombre réel α_i tel que $f(x) = \alpha_i$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$. La subdivision S est dite* ***adaptée*** *à f.*

Rappelons que pour un ensemble A, la **fonction indicatrice** de A, notée $\mathbf{1}_A$, est définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Exemple 1.1.6. La fonction $f = 2\mathbf{1}_{[0,2[} - 5\mathbf{1}_{[2,4[} + 3\mathbf{1}_{[4,5]}$ est une fonction en escalier.

Remarque 1.1.7. Il existe plusieurs subdivisions adaptées à une fonction en escalier. Par exemple, si $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ alors $f = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + \mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}$. Les subdivisions $S = \{0, 1\}$ et $S' = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sont adaptées à f.

Proposition 1.1.8. *L'ensemble $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$.*

Exemple 1.1.9. Si $f = \mathbf{1}_{[0,1]} - 2\mathbf{1}_{]1,2]}$ et $g = 3\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + 5\mathbf{1}_{]\frac{1}{2},2]}$ alors $f + g$ est une fonction en escalier puisque

$$f + g = 4\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + 6\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]} + 3\mathbf{1}_{]1,2]}.$$

Intégrale des fonctions en escalier

Proposition 1.1.10. *Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour toute subdivision $S = \{x_i\}_{i\leq n}$ adaptée à f, i.e. telle qu'il existe α_i, $i \leq n-1$, tel que $f(x) = \alpha_i$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, notons*

$$I_S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_{i+1} - x_i).$$

La quantité $I_S(f)$ ne dépend pas de la subdivision S. En d'autres termes, pour toutes subdivisions S et S' adaptées à f, on a $I_S(f) = I_{S'}(f)$.

Définition 1.1.11. *Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et S une subdivision adaptée à f. Avec les notations précédentes, on appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ le nombre réel*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I_S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_{i+1} - x_i).$$

Exemple 1.1.12.

1. Si f est une fonction constante valant un certain nombre réel c sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a).$$

2. Si $f = 2\mathbf{1}_{[0,2[} - 5\mathbf{1}_{[2,4[} + 3\mathbf{1}_{[4,5]}$, avec $a = 0$, $b = 5$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_0^5 (2\mathbf{1}_{[0,2[}(x) - 5\mathbf{1}_{[2,4[}(x) + 3\mathbf{1}_{[4,5]}(x))\mathrm{d}x = -3.$$

Proposition 1.1.13. *Soient a et b deux nombres réels. L'application de $\mathcal{E}([a, b])$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$*

(i) est linéaire, i.e. pour toutes fonctions en escalier f et g et pour tous nombres réels α et β,

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

(ii) est positive, i.e. si f est une fonction en escalier positive alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$;

(iii) satisfait l'inégalité triangulaire, i.e. pour toute fonction en escalier f,

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x;$$

(iv) satisfait la relation de Chasles, i.e. pour toute fonction en escalier f et pour tout $c \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(v) satisfait la relation suivante : pour toute fonction en escalier f,

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Sommes de Darboux

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction bornée de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Pour définir son intégrale, l'idée est d'approcher f par des fonctions en escalier. Etant donné une subdivision $S = \{x_i\}_{i\leq n}$ adaptée à f, on pose

$$E^-_{(f,S)}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} m_i \mathbf{1}_{[x_i,x_{i+1}[}(x) + m_{n-1}\mathbf{1}_{[x_{n-1},x_n]}(x),$$

avec $m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}[} f(x)$, $i \leq n-2$, et $m_{n-1} = \inf_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x)$;

$$E^+_{(f,S)}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} M_i \mathbf{1}_{[x_i,x_{i+1}[}(x) + M_{n-1}\mathbf{1}_{[x_{n-1},x_n]}(x),$$

avec $M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}[} f(x)$, $i \leq n-2$, et $M_{n-1} = \sup_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x)$.

Remarquons que la fonction f est encadrée par les deux fonctions en escalier ci-dessus : pour tout $x \in [a,b]$.

$$E^-_{(f,S)}(x) \leq f(x) \leq E^+_{(f,S)}(x).$$

Définition 1.1.14. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et S une subdivision de $[a,b]$. On appelle*

*(i) **somme de Darboux inférieure** le nombre réel*

$$A^-(f,S) = \int_a^b E^-_{(f,S)}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i);$$

(ii) ***somme de Darboux supérieure*** *le nombre réel*

$$A^+(f,S) = \int_a^b E^+_{(f,S)}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i).$$

Proposition 1.1.15. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et S une subdivision de $[a,b]$.*

(i) On a $A^-(f,S) \leq A^+(f,S)$.

(ii) Si S' est une subdivision plus fine que S, i.e. telle que $S \subset S'$, alors $A^-(f,S) \leq A^-(f,S')$ et $A^+(f,S) \geq A^+(f,S')$.

La deuxième assertion se comprend ainsi : plus on affine la subdivision, plus les fonctions en escalier deviennent précises et se rapprochent de f.

1.2 Intégrale de Riemann sur un intervalle fermé borné

Fonctions continues et uniformément continues

Définition 1.2.1. *Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction et I un intervalle. On dit que f est* ***continue*** *sur I si la propriété suivante est satisfaite :*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta := \eta(x,\varepsilon),\ \forall y \in I,\ (|y-x| \leq \eta) \Longrightarrow (|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon).$$

Définition 1.2.2. *Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction et I un intervalle. On dit que f est* ***uniformément continue*** *sur I si la propriété suivante est satisfaite :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta := \eta(\varepsilon),\ \forall (x,y) \in I^2,\ (|y-x| \leq \eta) \Longrightarrow (|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon).$$

Proposition 1.2.3. *Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction et I un intervalle. Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I*

La réciproque de la proposition ci-dessus n'est pas vraie en général. Cependant, dans le cas où l'intervalle I est un segment $[a,b]$, les notions de continuité et d'uniforme continuité sont équivalentes d'après le théorème de Heine énoncé ci-dessous. [1]

Théorème 1.2.4. *(Heine) Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction. Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Exemple 1.2.5.
1. La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.
2. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbf{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
3. La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbf{R}$.

Fonctions continues par morceaux

Définition 1.2.6. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est* ***continue par morceaux*** *sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que :*

(i) f est continue sur l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \leq n-1$;

(ii) la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, i.e. $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$, se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \leq n-1$.

1. Le théorème de Heine ci-dessous sera utile pour montrer que toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ est Riemann-intégrable (proposition 1.2.12).

Remarque 1.2.7. De façon équivalente, la propriété *(ii)* signifie que f admet des limites à droite et à gauche (finies) en x_i, $1 \leq i \leq n-1$, une limite à gauche (finie) en $x_0 = a$ et une limite à droite (finie) en $x_n = b$.

Exemple 1.2.8.
1. La fonction partie entière E est continue par morceaux sur $[0,5]$. Une subdivision adaptée est $x_i = i$, $0 \leq i \leq 5$.
2. Plus généralement, toute fonction en escalier est continue par morceaux.
3. La fonction f, définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$, n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$. En effet, f n'admet pas de limite à gauche ni de limite à droite (finie) en 0.

Fonctions Riemann-intégrables

Définition 1.2.9. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. On dit que f est **Riemann-intégrable** (sur $[a,b]$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S telle que ses sommes de Darboux vérifient*

$$A^+(f,S) - A^-(f,S) \leq \varepsilon.$$

A fortiori si l'inégalité ci-dessus est vraie pour une subdivision S, elle est encore vraie pour toute subdivision S' plus fine que S.

La proposition ci-dessous donne un critère d'équivalence pour qu'une fonction soit Riemann-intégrable.

Proposition 1.2.10. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) la fonction f est Riemann-intégrable ;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier f_1 et f_2 telles que $f_1 \leq f \leq f_2$ et $\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.

Proposition 1.2.11. *L'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle $[a,b]$ est un espace vectoriel.*

Proposition 1.2.12. *(i) Les fonctions continues par morceaux sont Riemann-intégrables.*

(ii) Les fonctions monotones (croissantes ou décroissantes) sont Riemann-intégrables.

Contre-exemple 1.2.13. La fonction $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[a,b]$, pour tous nombres réels a et b. En revanche, au sens de Lebesgue (cf L3, probabilités 2) elle est intégrable.

Proposition 1.2.14. *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. En prenant les* sup *et* inf *sur l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$, on a*

$$\sup_S A^-(f,S) = \inf_S A^+(f,S).$$

Définition 1.2.15. *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. On appelle **intégrale** (de Riemann) de f la quantité*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_S A^-(f,S) = \inf_S A^+(f,S).$$

De façon équivalente, si f est Riemann-intégrable, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\rho(S)\to 0} A^-(f,S) = \lim_{\rho(S)\to 0} A^+(f,S).$$

Proposition 1.2.16. *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\tfrac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Propriétés de l'intégrale de Riemann

Le résultat ci-dessous généralise la proposition 1.1.13.

Proposition 1.2.17. *Soient a et b deux nombres réels. L'application $f \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, où f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$,*

(i) est linéaire, i.e. pour toutes fonctions en escalier f et g et pour tous nombres réels α et β,

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

(ii) est positive, i.e. si f est Riemann-intégrable et positive alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$;

(iii) satisfait l'inégalité triangulaire, i.e. pour toute fonction en escalier f,

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x;$$

(iv) satisfait la relation de Chasles, i.e. pour toute fonction en escalier f et pour tout $c \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(v) satisfait la relation suivante : pour toute fonction en escalier f,

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Une conséquence de l'assertion *(ii)* est que si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 1.2.18. *(inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient a et b deux nombres réels et soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$. Alors fg est bornée et intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Proposition 1.2.19. *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$, positive et telle que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$. Alors f prend la valeur 0 en tout point de continuité.*

Corollaire 1.2.20. Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables et continues sur $[a,b]$ telles que $f \leq g$. Si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur $[a,b]$.

Proposition 1.2.21. *(formule de la moyenne) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ avec $g \geq 0$. Notons $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$. Alors il existe $k \in [m, M]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = k \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

De plus, si f est continue alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Définition 1.2.22. *Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ s'appelle la* ***valeur moyenne*** *de la fonction Riemann-intégrable f sur $[a,b]$.*

Intégrale et primitive

Proposition 1.2.23. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction Riemann-intégrable. L'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue.*

Notons que si f est Riemann-intégrable, l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est seulement continue. A priori, elle n'est pas dérivable et il ne s'agit pas d'une primitive de f.

Proposition 1.2.24. *Si f admet une limite (resp. à droite, à gauche) en $x_0 \in [a,b]$ alors l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable (resp. à droite, à gauche) en x_0 de dérivée $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ (resp. $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$).*

Corollaire 1.2.25. L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable en tout point $x_0 \in [a,b]$ en lequel f est continue, de dérivée $F'(x_0) = f(x_0)$.

Proposition 1.2.26. *Soit f une application continue sur $[a,b]$. Alors pour tout point $c \in [a,b]$, l'application $x \mapsto \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a,b]$. Il s'agit de l'unique primitive qui s'annule en c.*

En particulier, toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Théorème 1.2.27. *(théorème fondamental de l'analyse) Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Si F est une primitive de f alors*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Formules d'intégration

Théorème 1.2.28. *(intégration par parties) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Théorème 1.2.29. *(changement de variables) Soit $f : [c,d] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $g : [a,b] \to [c,d]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $(f \circ g) \cdot g'$ est intégrable et*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y.$$

1.3 Intégrales impropres

On s'intéresse aux intégrales de fonctions définies sur $[a, b[$ mais pas en b, avec $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Une question est de donner malgré tout un sens à l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ en b.

Définitions et propriétés

Définition 1.3.1. *Une fonction $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ est dite* ***localement intégrable*** *en b si elle est Riemann-intégrable sur tout sous-ensemble compact $[c, d]$ de $[a, b[$.*

A titre d'exemple, toute fonction continue sur $[a, b[$ est localement intégrable. Dans ce qui suit, on note $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [a, b[$, où f est localement intégrable en b.

Définition 1.3.2. *(i) Si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite I en b, on dit que l'**intégrale impropre** $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente**. On attribue alors à cette quantité la valeur I.*

*(ii) Si F n'a pas de limite en b, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **divergente**.*

Exemple 1.3.3. 1. La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. L'intégrale impropre $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est localement intégrable sur $[0, 1[$. L'intégrale impropre $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est localement intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. Son intégrale impropre est convergente sur $[1, +\infty[$ et divergente sur $]0, 1]$.

Définition 1.3.4. *Soit $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction localement intégrable. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ de f est dite **absolument convergente** si l'intégrale impropre de $|f|$ converge.*

Proposition 1.3.5. *Soit $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction localement intégrable. Si l'intégrale impropre de f sur $[a, b[$ converge absolument alors elle converge.*

Intégrales impropres des fonctions positives

Proposition 1.3.6. *Soit $f : [a, b[\to \mathbf{R}_+$ une fonction localement intégrable à valeurs positives. L'intégrale impropre de f converge si et seulement si l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est alors la borne sup de F sur $[a, b[$ (atteinte en b).*

Proposition 1.3.7. *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbf{R}_+$ deux fonctions localement intégrables à valeurs positives telles que $f \leq g$.*

(i) Si l'intégrale impropre de g converge sur $[a, b[$, alors il en est de même pour f et

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

(ii) Si l'intégrale de f diverge alors il en est de même pour g.

Proposition 1.3.8. *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbf{R}_+$ deux fonctions localement intégrables à valeurs positives. Si f et g sont équivalentes en b alors leurs intégrales impropres sont de même nature.*

Exemple 1.3.9. 1. En $+\infty$, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sont intégrables si et seulement si $\alpha > 1$. En particulier, toute fonction f telle que $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$, admet une intégrale impropre convergente en $+\infty$.

2. En 0, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sont intégrables si et seulement si $\alpha < 1$. En particulier, toute fonction f telle que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha < 1$, admet une intégrale impropre convergente en 0.

Intégrale doublement impropre

Il se peut qu'une intégrale soit doublement impropre. Donnons-nous, par exemple, un intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ et une application localement intégrable f sur $]a, b[$. Le problème de la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ se pose à la fois en a et en b.

Définition 1.3.10. *Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction, avec $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$. Soit $\Phi : (x, y) \mapsto \int_x^y f(t)\mathrm{d}t$. Si Φ possède une limite au point (a, b), on dit que l'intégrale **doublement impropre** $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **converge**.*

Proposition 1.3.11. *Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

(ii) Pour tout $c \in]a, b[$ les intégrales impropres $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

Si (i) ou (ii) est satisfait alors pour tout $c \in]a, b[$, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 1.3.12. 1. L'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 e^{-|t|}\mathrm{d}t + \lim_{y\to+\infty} \int_0^y e^{-|t|}\mathrm{d}t = 2.$$

2. L'intégrale doublement impropre $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge. En effet, elle converge en 0 car $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable. Elle converge en ∞ car $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = o(1/t^2)$.

Chapitre 2

Théorèmes d'interversion et intégrale dépendant d'un paramètre

Sommaire

Etant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on s'intéresse à une suite de fonctions (f_n) définies sur I, à valeurs réelles, et convergeant (en un sens à préciser) vers une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. Le but est d'établir des résultats, dits d'interversion limite-intégrale, garantissant que sous de bonnes hypothèses, on a

$$\int_I f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Les théorèmes d'interversion sont énoncés dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Les énoncés nécessitent des hypothèses restrictives qui peuvent être affaiblies dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Les deux résultats les plus importants sont le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée. Ce dernier sera utilisé pour établir la continuité et la dérivabilité d'intégrale dépendant d'un paramètre.

2.1 Théorèmes d'interversion

Afin de donner un sens à ce que l'on entend par le fait qu'une suite de fonctions (f_n) converge vers une fonction f, on rappelle ci-dessous les concepts de convergence simple et de convergence uniforme.

Définition 2.1.1. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soient (f_n) une suite de fonctions, avec $f_n : I \to \mathbf{R}$ pour tout $n \geq 0$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction.*

(i) On dit que (f_n) ***converge simplement*** *vers* f *si, pour tout* $x \in I$*, on a*

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, x), \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N) \Longrightarrow (|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

(ii) On dit que (f_n) ***converge uniformément*** *vers* f *si*

$$||f_n - f||_\infty := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall x \in I, \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N) \Longrightarrow (|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Proposition 2.1.2. *Si* (f_n) *est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction* f *alors* (f_n) *converge simplement vers* f*.*

Convergence uniforme

Théorème 2.1.3. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues par morceaux définies sur* $[a, b]$ *à valeurs réelles. Si* (f_n) *converge uniformément vers une fonction* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *continue par morceaux, alors* f *est intégrable sur* $[a, b]$ *et*

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 2.1.4. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n(1 - x)^n$. Alors $\sup_{[0,1]} f_n = 4^{-n}$. Par le théorème ci-dessus, $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 2.1.5.

1. L'hypothèse de compacité est importante. A titre d'exemple, si (f_n) est la suite de fonctions continues définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f_n(0) = 0$, $f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $f_n([2n, +\infty[) = \{0\}$ et f_n affine sur $[0, n]$ et $[n, 2n]$, alors $\sup_{\mathbf{R}_+} |f_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ mais $\int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
2. Le théorème ci-dessus reste vrai si l'on suppose que f_n et f sont Riemann-intégrables.

Corollaire 2.1.6. Soit (u_n) une suite de fonctions continues. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^\infty u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Une conséquence du corollaire ci-dessus est que, si $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors pour $[a, b] \subset]-R, R[$, on a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty a_n \int_a^b x^n\mathrm{d}x$.

Exemple 2.1.7. Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}$. On retrouve bien le fait que

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Théorème de convergence monotone

L'intervalle d'intégration est ici un intervalle quelconque.

Théorème 2.1.8. *(théorème de convergence monotone) Soit I un intervalle. Soit (f_n) une suite de fonctions, avec $f_n : I \to \mathbf{R}$, et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Supposons que :*
- *les fonctions f_n et f soient continues par morceaux sur I,*
- *f_n converge simplement vers f sur I,*
- *pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et positive.*

Alors

$$\int_I f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

Corollaire 2.1.9. Soit I un intervalle. Soit (u_n) une suite de fonctions, avec $u_n : I \to \mathbf{R}$, telle que :
- les u_n sont continues par morceaux sur I et positifs,
- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I et sa somme S est continue par morceaux.

Alors

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_I u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 2.1.10. Considérons la suite de fonctions (u_n) définie par $u_n(x) = x^{2n}(1-x)$. Le corollaire du théorème de convergence monotone appliqué à la suite (u_n) entraine que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

Théorème de convergence dominée

Théorème 2.1.11. *(théorème de convergence dominée) Soit I un intervalle. Soit (f_n) une suite de fonctions, avec $f_n : I \to \mathbf{R}$, et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Supposons que :*
- *les fonctions f_n et f soient continues par morceaux sur I,*
- *f_n converge simplement vers f sur I,*
- *il existe une fonction $g : I \to \mathbf{R}_+$ continue par morceaux, telle que $\int_I g(x)\mathrm{d}x < \infty$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.*

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.1.12. L'hypothèse de domination est importante. A titre d'exemple, si (f_n) est la suite de fonctions définie par $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n[}$, avec $n \geq 1$, alors f_n converge simplement vers la fonction nulle mais, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbf{R}_+} f_n(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Corollaire 2.1.13. Soit I un intervalle. Soit (u_n) une suite de fonctions, avec $u_n : I \to \mathbf{R}$, telle que :
- les u_n sont continues par morceaux sur I,

- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I et sa somme S est continue par morceaux,
- il existe une fonction $g : I \to \mathbf{R}_+$ continue par morceaux, telle que $\int_I g(x)\mathrm{d}x < \infty$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in I$,
$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq g(x).$$

Alors les fonctions u_n et S sont intégrables sur I, la série de terme général $\int_I u_n(x)\mathrm{d}x$ converge et
$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 2.1.14. Soit (λ_n) une suite strictement croissante de nombres réels strictement positifs convergeant vers l'infini. Le corollaire ci-dessus entraine que
$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

2.2 Intégrale dépendant d'un paramètre

Dans ce qui suit, on considère une fonction F de la forme $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$. Le but est d'établir des propriétés de régularité sur la fonction F sous de bonnes hypothèses.

Théorème 2.2.1. *(théorème de continuité sous le signe intégral) Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ et I un intervalle quelconque. Soit $f : A \times I \to \mathbf{R}$ une fonction telle que :*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
- *pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,*
- *il existe une application $g : I \to \mathbf{R}_+$ continue par morceaux et intégrable telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$, on a $|f(x,t)| \leq g(t)$.*

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A. En d'autres termes, pour tout $a \in A$, on a
$$\lim_{x\to a} \left(\int_I f(x,t)\mathrm{d}t\right) = \int_I \left(\lim_{x\to a} f(x,t)\right) \mathrm{d}t = \int_I f(a,t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.2.2. La fonction $F : x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Théorème 2.2.3. *(théorème de dérivation sous le signe intégral) Soient A et I deux intervalles quelconques et $f : A \times I \to \mathbf{R}$ une fonction telle que :*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et intégrable sur I,*
- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A,*
- *il existe une fonction $g : I \to \mathbf{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$, on a*
$$|\partial_x f(x,t)| \leq g(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A. De plus, pour tout $a \in A$, on a
$$F'(a) = \int_I \partial_x f(a,t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.2.4. La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0,\infty[$.

Chapitre 3

Intégrales multliples

Sommaire

3.1 Intégrale double

Construction de l'intégrale double

Intégration sur un rectangle

Définition 3.1.1. *Soit $R = [a, b] \times [c, d]$, avec $a < b$ et $c < d$.*

(i) On appelle ***quadrillage*** *du rectangle R toute famille $S = \{R_{ij}\}$, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq m-1$, de rectangles, i.e. de la forme $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, tels que :*
- *$(x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$, i.e. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$;*
- *$(y_0, \ldots, y_m)$ est une subdivision de $[c, d]$, i.e. $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$.*

(ii) Le quadrillage est dit ***régulier*** *si, pour tous i et j, on a*

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{m}.$$

Définition 3.1.2. *Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle, avec $a < b$ et $c < d$. Soit $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction.*

(i) On dit que f est une ***fonction en escalier*** *si f est bornée et s'il existe un quadrillage $\{R_{ij}\}$ de R tel que f est constante à l'intérieur de chaque rectangle R_{ij}.*

(ii) Soit f une fonction en escalier et α_{ij} la valeur de f sur l'intérieur de R_{ij}. Le nombre (indépendant du choix du quadrillage $\{R_{ij}\}$ de R) défini par

$$I_R(f) = \sum_{i \leq n-1, j \leq m-1} \alpha_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

est appelé ***intégrable double*** *de f sur R. On le note $\int_R f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

Dans le même esprit que la définition 1.1.14, étant donné un quadrillage $S = \{R_{ij}\}$, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq m-1$, on introduit les **sommes de Darboux inférieure** et **supérieure** comme suit :

$$A^-(f,S) = \sum_{i \leq n-1, j \leq m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$

avec $m_{ij} = \inf_{x \in R_{ij}} f(x)$; et

$$A^+(f,S) = \sum_{i \leq n-1, j \leq m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$

avec $M_{ij} = \sup_{x \in R_{ij}} f(x)$. On obtient un résultat semblable à la proposition 1.1.15, à savoir que $A^-(f,S) \leq A^+(f,S)$ et que, si S' est un quadrillage tel que $S \subset S'$, alors $A^-(f,S) \leq A^-(f,S')$ et $A^+(f,S) \geq A^+(f,S')$.

Remarquons que l'inf et le sup définissant les m_{ij} et M_{ij} portent sur des rectangles *fermés* tandis que, dans le premier chapitre, l'inf et le sup portaient sur des intervalles semi-ouverts du type $[x_i, x_{i+1}[$. Cela ne change cependant rien à la construction de l'intégrale de Riemann en dimension 2.

Définition 3.1.3. *Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle et $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction bornée. On dit que f est (Riemann)* ***intégrable*** *sur R si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un quadrillage S telle que ses sommes de Darboux vérifient*

$$A^+(f,S) - A^-(f,S) \leq \varepsilon.$$

Proposition 3.1.4. *Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle. Toute fonction continue sur R est Riemann-intégrable.*

Remarque 3.1.5. Similairement à ce que l'on obtient dans le cas de l'intégrabilité sur $\mathbf{R}$, une fonction $f : R \to \mathbf{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier f_1 et f_2 définies sur R telles que $f_1 \leq f \leq f_2$ et $\int_R f_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_R f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \varepsilon$.

Proposition 3.1.6. *Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle et $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable. En prenant les* sup *et* inf *sur l'ensemble des quadrillages de R, on a*

$$\sup_S A^-(f,S) = \inf_S A^+(f,S).$$

Définition 3.1.7. *Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle et $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable. On appelle* ***intégrale*** *de f la quantité*

$$\int_R f(x)\mathrm{d}x = \sup_S A^-(f,S) = \inf_S A^+(f,S).$$

Remarque 3.1.8.
1. L'intégrale double satisfait les propriétés de linéarité, de positivité et l'inégalité triangulaire.
2. Si $f \equiv 1$ alors $\int_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)(d-c) = \mathcal{A}(R)$.

Intégration sur un domaine quarrable Les rectangles du plan de $\mathbf{R}^2$ de la forme $[a,b] \times [c,d]$ sont également appelés des **pavés**.

Définition 3.1.9. *(i) Une partie $D \subset \mathbf{R}^2$ est dite* ***pavable*** *s'il existe un nombre fini de pavés $R_1, \ldots, R_n$ d'intérieurs deux à deux disjoints tels que $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$. On définit alors l'**aire** de D par*

$$\mathcal{A}(D) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(R_i).$$

*(ii) Soient D une partie pavable, avec $D = \bigcup_{i=1}^n R_i$, et $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction telle que la restriction de f à D_i, $i \leq n$, soit Riemann-intégrable. On définit l'**intégrale de f sur** D par :*

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{R_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Il est possible d'étendre la définition de l'intégrale de Riemann au delà des ensembles pavables, en introduisant les ensembles quarrables.

Définition 3.1.10. *Une partie (bornée) $D \subset \mathbf{R}^2$ est dite* ***quarrable*** *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux ensembles pavables D_1 et D_2 de $\mathbf{R}^2$ tels que $D_1 \subset D \subset D_2$ et $\mathcal{A}(D_2) - \mathcal{A}(D_1) \leq \varepsilon$.*

Nous nous intéresserons dans la suite à un certain type d'ensembles : les domaines simples.

Définition 3.1.11. *On appelle* ***domaine simple*** *tout ensemble borné D de la forme*

$$D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbf{R} : u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

ou de la forme

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times [c,d] : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

avec u et v deux fonctions continues définies sur $[a,b]$ telles que $u \leq v$ (resp. φ, ψ deux fonctions continues définies sur $[c,d]$).

Exemple 3.1.12.
1. Tout rectangle (borné) est un domaine simple.
2. Le disque $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un domaine simple.

Proposition 3.1.13. *Tout domaine simple est un ensemble quarrable.*

Il est possible de définir un concept d'**aire** d'une partie quarrable et, plus généralement, l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur une partie quarrable. Nous ne le ferons pas et nous contenterons d'intégrer des fonctions uniquement sur des domaines simples.

Proposition 3.1.14. *Si D_1 et D_2 sont deux domaines quarrables d'intérieurs disjoints et f une fonction intégrable sur $D_1 \cup D_2$, alors*

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Théorème de Fubini pour les intégrales doubles

Nous donnerons deux énoncés du théorème de Fubini : le premier concerne le cas où le domaine d'intégration est un rectangle. Le second est une extension du premier et traite du cas où le domaine est un domaine simple.

Théorème 3.1.15. *(Fubini, cas du rectangle) Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle et $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Exemple 3.1.16. Considérons le cas où $f(x, y) = ye^{xy}$ et $R = [1, 2] \times [0, 2]$. On a [1]

$$\int_R ye^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}.$$

Pour passer au cas plus général, considérons un domaine simple $D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbf{R} : u(x) \leq y \leq v(x)\}$, où u et v sont deux fonctions et $D \subset [a, b] \times [c, d]$.

Définition 3.1.17. *(i) Soit $x \in [a, b]$. La quantité*

$$D_x = \{y \in [c, d] : u(x) \leq y \leq v(x)\} = [u(x), v(x)]$$

*s'appelle la **section** (ou la tranche) **verticale** d'abscisse x.*

(ii) Soit $y \in [c, d]$. La quantité

$$D^y = \{x \in [a, b] : u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

*s'appelle la **section** (ou la tranche) **horizontale** d'ordonnée y.*

Théorème 3.1.18. *(Fubini, cas d'un domaine simple) Soit*

$$D = \{(x, y) \in [a, b] \times [c, d] : u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

un domaine simple, avec u et v deux fonctions continues, et soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{D_x} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{D^y} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Exemple 3.1.19. Considérons le cas où $f(x, y) = x^2y$ et

$$D = T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -x + 2\}.$$

On a

$$\int_T x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8}{15}.$$

Changement de variable pour les intégrales doubles

Commençons par rappeler quelques concepts de topologie abordés en L2.

Définition 3.1.20. *Soit U un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}^2$. On dit que U est un **ouvert** (pour la topologie naturelle) si, pour tout $x \in U$, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $D(x, r) \subset U$, où $D(x, r)$ désigne le disque ouvert (pour la norme euclidienne) de centre x et de rayon r.*

1. Remarquons qu'il est plus facile d'intégrer d'abord par rapport à x puis par rapport à y que l'inverse

Exemple 3.1.21. 1. Le plan $\mathbf{R}^2$ est un ouvert.

2. Le disque ouvert $D(0,1)$, centrée en l'origine et de de rayon 1, est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

Définition 3.1.22. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{R}^2$ et $\varphi : U \to V$ une fonction. On dit que φ est de **classe** $\mathcal{C}^1$ si $(u,v) \mapsto \partial_u \varphi(u,v)$ et $(u,v) \mapsto \partial_v \varphi(u,v)$ existent et sont continues.*

Définition 3.1.23. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{R}^2$ et soit $\varphi : U \to V$ une fonction. On dit que φ est un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme** si φ est bijective et si φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Définition 3.1.24. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{R}^2$ et $\varphi : U \to V$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle **matrice jacobienne** en (u,v) la matrice*

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1(u,v) & \partial_v \varphi_1(u,v) \\ \partial_u \varphi_2(u,v) & \partial_v \varphi_2(u,v) \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.1.25. 1. Soit $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une application affine bijective, i.e. [2] de la forme

$$\varphi(u,v) = A \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B, \tag{3.1.1}$$

avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ inversible et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Alors $J_\phi(u,v) = A$.

2. Considérons la fonction $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $\varphi(u,v) = (u^2 + v^3, u^2 - v^3)$ pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. La matrice jacobienne de φ en tout point (u,v) est

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 3v^2 \\ 2u & -3v^2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1.26. *(formule du changement de variable) Soit $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, où U et V sont deux ouverts de $\mathbf{R}^2$. Soit D un domaine simple, tel que $D \subset V$, et soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi^{-1}(D)} f(\varphi(u,v))|\det J_\varphi(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Remarque 3.1.27. Dans le cas où $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est une application affine bijective, i.e. de la forme (3.1.1), on a pour toute fonction continue $f : D \to \mathbf{R}$, où D est un domaine simple de $\mathbf{R}^2$,

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi^{-1}(D)} f(\varphi(u,v))|\det A|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Corollaire 3.1.28. (formule du changement en coordonnées polaires) Soit

$$\varphi :]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_+ \times \{0\}),$$

avec $\varphi(r,\theta) = (x,y)$ définie par

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta.$$

Alors, pour toute fonction continue $f : D \to \mathbf{R}$, où D est un domaine simple tel que $D \subset \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_+ \times \{0\})$, on a

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi^{-1}(D)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

2. Ici on fait un abus de notation en identifiant un couple de $\mathbf{R}^2$ à une matrice colonne

Remarque 3.1.29. Le résultat ci-dessus est en fait vrai pour tout domaine simple D inclus dans $\mathbf{R}^2$, et pas seulement dans $\mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_+ \times \{0\})$, car $\mathbf{R}_+ \times \{0\}$ est un ensemble de mesure nulle (au sens de Lebesgue).

Exemple 3.1.30. Considérons le cas où $f(x,y) = xy^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } y \geq 0\}$. Alors

$$\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]0, 2\pi[: 1 \leq r \leq 2 \text{ et } \theta \in]0,\pi]\}$$

et

$$\int_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

3.2 Intégrale triple

La définition de l'intégrale de Riemann triple est analogue à celle de deux variables. On commence par considérer le cas des parallélépipèdes (appelés également pavés), i.e. de la forme $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \subset \mathbf{R}^3$. Ensuite, on étend la définition à des domaines dits simples, qui incluent ceux de la forme

$$D_1 = \{(x,y,z) \in [a,b] \times [c,d] \times \mathbf{R} : u(x,y) \leq z \leq v(x,y)\}.$$

Etant donnée une fonction $f : D \to \mathbf{R}$ Riemann intégrable, on note l'intégrale triple de la façon suivante : $\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. On ne donne pas plus de précisions sur ces ensembles ni sur la définition de l'intégrale triple.

Remarque 3.2.1.
1. Si $f \equiv 1$ et $P = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ alors $\int_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_P \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = (b-a)(d-c)(f-e) = \mathcal{V}(P)$.
2. Si $D \subset \mathbf{R}^3$ est un domaine simple alors on définit le **volume** de D par

$$\mathcal{V}(D) = \int_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Théorèmes de Fubini pour les intégrales triples

On commence d'abord par le cas particulier des parallélépipèdes. Ensuite, on étendra le théorème de Fubini à des domaines simples.

Théorème 3.2.2. *(Fubini, cas du parallélépipède) Soit $P = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ un parallélépipède et soit $f : P \to \mathbf{R}$ une application continue. On a*

$$\int_P f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

De plus, l'intégrale $\int_P f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ne dépend pas de l'ordre choisi dans l'itération.

Exemple 3.2.3. Prenons $f(x,y,z) = z^2 y \sin(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ et $P = [0,1] \times [0,2] \times [0,1]$. On a

$$\int_{[0,1]\times[0,2]\times[0,1]} z^2 y \sin(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2}{2}.$$

Pour étendre le résultat ci-dessus à des domaines simples, on introduit, dans le même esprit que ce qu'on a fait pour les intégrales doubles, des notions de section. A titre d'exemple, si $D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ est un domaine simple et si on fixe $x \in [a,b]$, alors la quantité

$$D_x = \{(y,z) \in [c,d] \times [e,f] : (x,y,z) \in D\}$$

s'appelle la **section d'abscisse** x. De manière analogue, on définit les **sections** D_y, D_z ou encore la **pile** $D_{(x,y)}$.

Théorème 3.2.4. *(Fubini, cas d'un domaine simple) Soit $D = \{(x,y,z) \in [a,b] \times [c,d] \times \mathbf{R} : u(x,y) \leq z \leq v(x,y)\}$ un domaine simple, avec u et v deux fonctions continues. Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

De plus, l'intégrale ne dépend pas de l'ordre choisi dans l'itération.

Exemple 3.2.5. Prenons $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. On a

$$\mathcal{V}(D) = \int_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}.$$

Changement de variable pour les intégrales triples

Théorème 3.2.6. *Soit $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, où U et V sont deux ouverts de $\mathbf{R}^3$. Soit D un domaine simple, tel que $D \subset V$, et soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\varphi^{-1}(D)} f(\varphi(u,v,w))|\det J_\varphi(u,v,w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

L'un des changements de variables les plus usuels dans l'espace concerne les coordonnées sphériques

Théorème 3.2.7. *(formule du changement en coordonnées sphériques) Soit $\tilde{\varphi} : \mathbf{R}_+^* \times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}^3$ la fonction définie par $\varphi(r,\theta,\sigma) = (x,y,z)$, avec*

$$x = r\cos\theta\cos\sigma,\ y = r\sin\theta\sin\sigma,\ z = r\sin\sigma.$$

La fonction $\tilde{\varphi}$ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \to V$, avec $U = \mathbf{R}_+^* \times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $V = \varphi(U)$, définie par $\varphi(u,v,w) = \tilde{\varphi}(u,v,w)$. Pour toute fonction continue $f : D \to \mathbf{R}$, où D est un domaine simple de $\mathbf{R}^3$ tel que $D \subset V$, on a

$$\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\varphi^{-1}(D)} f(r\cos\theta\cos\sigma, r\sin\theta\cos\sigma, r\sin\sigma)r^2\cos\sigma\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\sigma.$$

Remarque 3.2.8. Similairement à la dimension 2, le résultat ci-dessus est en fait vrai pour tout domaine simple D inclus dans $\mathbf{R}^3$.

Chapitre 4

Séries de Fourier

Sommaire

La motivation de base de ce chapitre est d'approcher une fonction continue par morceaux et périodique par une somme de fonctions périodiques élémentaires, à savoir les fonctions cos et sin ou encore, ce qui revient au même, par des exponentielles complexes. Au même titre que toute fonction continue sur un intervalle compact est naturellement approchée par des fonctions polynomiales, on cherchera à approcher des fonctions continues par morceaux et périodiques par des polynômes dits trigonométriques, qui s'écrivent comme des combinaisons de fonctions périodiques élémentaires.

Historiquement, une telle approximation est due à Fourier. Dans le cadre de l'équation de la chaleur, Fourier a constaté que les solutions d'une telle équation s'écrivent comme des sommes (infinies) de fonctions périodiques élémentaires. Son problème a été étendu à des fonctions qui ne sont pas nécessairement solutions de l'équation de la chaleur. C'est dans ce cadre qu'est née la théorie de Fourier.

Les motivations de ce chapitre sont étroitement liées à la physique : l'enjeu est de donner un sens mathématique à la décomposition d'un signal en harmoniques. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que l'on cherche à approcher une fonction périodique (un signal) par des sommes de fonctions périodiques élémentaires (les harmoniques).

4.1 Coefficients de Fourier complexes et série de Fourier

Dans ce chapitre, nous nous limiterons aux fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques. On rappelle ci-dessous les définitions en question.

Définition 4.1.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est* ***continue par morceaux*** *sur $\mathbf{R}$ si f est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$, i.e. s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que :*

(i) f est continue sur l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \leq n-1$;

(ii) la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, i.e. $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$, se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \leq n-1$.

Définition 4.1.2. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est **2π-périodique** si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+2\pi) = f(x)$.*

Notation.
- On désigne par E l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques, et à valeurs dans $\mathbf{C}$.
- Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{et} \quad ||f||_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

- Pour toutes fonctions f et g dans E, on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(f(t)\overline{g(t)}\right)\mathrm{d}t + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}\left(f(t)\overline{g(t)}\right)\mathrm{d}t.$$

L'espace E est un espace vectoriel. De plus, $||f||_2^2 = \langle f, f\rangle$. Remarquons[1] que la forme sesquilinéaire hermitienne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ n'est pas un produit scalaire (de même que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_2$ ne sont pas des normes) car $\langle f, f\rangle = 0$ entraine que f est égale à 0 sauf en un nombre fini de points sur $[-\pi, \pi]$. Cependant, cela ne posera pas de problème pour la suite du cours. Pour une question de simplicité et par abus de langage, nous dirons que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire et que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_2$ sont des normes. Au même titre qu'on peut approcher toute fonction continue par des polynômes (réels) sur l'intervalle compact $[-\pi, \pi]$, le but de ce chapitre est d'approcher une fonction $f \in E$ (au sens des normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_2$) par des fonctions plus simples : les polynômes trigonométriques.

Définition 4.1.3. *On appelle **polynôme trigonométrique** toute fonction f de la forme*

$$f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n,$$

où $N \in \mathbf{N}$, $c_n \in \mathbf{C}$ et où, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la fonction e_n est définie par $e_n(t) = e^{int}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Exemple 4.1.4. Les fonctions cos et sin sont des polynômes trigonométriques.

Proposition 4.1.5. *L'ensemble des polynômes trigonométriques est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 4.1.6. *La famille $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ est une famille orthonormée de E pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Définition 4.1.7. *Soit $f \in E$. On appelle*

*(i) **coefficient de Fourier** de f d'ordre $n \in \mathbf{Z}$, le nombre complexe*

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t;$$

1. En revanche, si on se restreint à l'ensemble $\tilde{E}$ des fonctions continues (pas seulement continues par morceaux) et 2π-périodiques, on a un espace complet pour la norme $||\cdot||_\infty$ et un espace pré-hilbertien pour la norme $||\cdot||_2$.

(ii) ***série de Fourier*** *de f la série de fonctions (S_N) définie, pour tout $N \in \mathbf{N}$, par*

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n.$$

Remarque 4.1.8. Géométriquement $S_N(f) = p_{E_N}(f)$, où $p_{E_N}(f)$ est la *projection orthogonale* de f pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sur l'espace vectoriel $E_N = \text{vect}(e_n : -N \le n \le N)$. En d'autres termes $\langle p_{E_N}(f), f - p_{E_N}(f) \rangle = 0$. En particulier, $S_N(f)$ est la *meilleure approximation* (pour la norme $|| \cdot ||_2$) de f par des polynômes trigonométriques.

Exemple 4.1.9. 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Ici

$$c_n(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } n = \pm 1, \\ 0 \text{ si } n \neq \pm 1. \end{cases}$$

En particulier, $S_0(f) = 0$ et $S_N(f) = \cos$ pour tout $N \ge 1$.

2. Soit $f = \sum_{n=-N'}^{N'} c_n e_n$ un polynôme trigonométrique. On a $c_n(f) = c_n$ si $-N' \le n \le N'$ et $c_n(f) = 0$ sinon. En particulier, $S_N(f) = f$ pour tout $N \ge N'$.
3. Soit f la fonction (**créneau**) définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in [-\pi, 0[, \\ 1 \text{ si } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Ici

$$c_n(f) = \begin{cases} -\dfrac{2i}{n\pi} \text{ si } n \text{ est impair}, \\ 0 \text{ si } n \text{ est pair}. \end{cases}$$

4. Soit f la fonction (**dent de scie**) définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \in [-\pi, 0[, \\ x \text{ si } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Ici

$$c_n(f) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2} \text{ si } n \text{ est impair}, \\ 0 \text{ si } n \text{ est pair}. \end{cases}$$

Définition 4.1.10. *Soit $f \in E$. On appelle* ***harmonique*** *de rang $k > 0$ le polynôme trigonométrique $H_k(f) = c_k(f)e_k + c_{-k}(f)e_{-k}$.*

Exemple 4.1.11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x$. On a $H_k(f) = 0$ pour tout $k \neq 1$ et $H_1(f) = \cos$.

Remarque 4.1.12. Une autre façon d'écrire la série de Fourier, cette fois-ci en termes d'harmoniques, est

$$S_N(f) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{N} H_k(f).$$

Les questions naturelles sont : est-ce que $S_N(f)$ converge vers f pour $|| \cdot ||_2$? et pour $|| \cdot ||_\infty$?

4.2 Convergence en moyenne quadratique

Pour que la série de Fourier ait une chance de converger, il faut déjà établir que ses coefficients $c_n(f)$ tendent vers 0 quand $n \to \pm\infty$.

Théorème 4.2.1. *(lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in E$. On a $c_n(f) \longrightarrow 0$ quand $n \to \pm\infty$.*

Physiquement, le lemme de Riemann-Lebesgue se traduit par le fait que les harmoniques d'un signal ont des amplitudes arbitrairement petites.

Définition 4.2.2. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux** sur $\mathbf{R}$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, i.e. s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que :*

(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \leq n-1$;

(ii) la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, i.e. $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$, se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \leq n-1$.

Remarque 4.2.3.
1. Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors, pour tout $n \geq 0$, on a $c_n(f') = inc_n(f)$.
2. En particulier, si f est continue et $\mathcal{C}^2$ par morceaux, on a $|c_n(f)| = \frac{|c_n(f'')|}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Par le lemme de Riemann-Lebesgue, la série numérique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e_n$ converge normalement (puisque $\sum_{n\in\mathbf{Z}} ||c_n(f)e_n||_\infty = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|$). Le théorème 4.4.1, énoncé ci-dessous, est une généralisation de ce résultat à des fonctions continues mais qui sont seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Théorème 4.2.4. *(convergence en moyenne quadratique) Soit $f \in E$.*

(i) Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$||f||_2^2 = ||S_N(f)||_2^2 + ||S_N(f) - f||_2^2.$$

(ii) La série $(S_N(f))$ converge en moyenne quadratique vers f, i.e.

$$||S_N(f) - f||_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4.3 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval

Théorème 4.3.1. *(inégalité de Bessel) Soit $f \in E$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a*

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Théorème 4.3.2. *(égalité de Parseval) Soit $f \in E$. On a*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Remarque 4.3.3. Si $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ alors, d'après l'égalité de Parseval, on a $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 = 0$. Cela entraine que f est nulle sauf peut-être un nombre fini de points sur $[-\pi, \pi]$ (ses points de discontinuité). En particulier, si f et g sont continues 2π-périodiques, alors $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ entraine que $f = g$.

Physiquement, l'égalité de Parseval exprime la façon dont l'énergie correspondant au signal se répartit entre les amplitudes des différents harmoniques. D'un point de vue mathématique, elle peut être utilisée pour calculer des sommes de séries.

Exemple 4.3.4. Si f est la fonction créneau, on a :

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^2(t)dt=1,$$

ce qui permet d'en déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

L'égalité ci-dessus permet d'avoir une valeur explicite de $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. En effet, en posant $S=\zeta(2)$, on a $\frac{S}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$. Ceci donne

$$S-\frac{S}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

et par conséquent $S=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

4.4 Théorèmes de convergence de la série de Fourier

Le théorème suivant garantit que, sous une hypothèse de forte régularité, la série de Fourier converge normalement vers la fonction.

Théorème 4.4.1. *Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ une fonction continue, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier $(S_N(f))$ de f converge normalement (et donc uniformément) vers f sur $\mathbf{R}$. En d'autres termes,*

(i) convergence normale :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)|<\infty;$$

(ii) convergence uniforme :

$$||S_N(f)-f||_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

L'assertion *(i)* garantit bien la convergence normale de $S_N(f)$ puisque $\sum_{n\in\mathbf{Z}}||c_n(f)e_n||_\infty=\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)|$.

L'exemple de la dent de scie illustre bien les problèmes de convergence des séries de Fourier pour les points en lesquels la fonction est peu régulière. Bien qu'il y ait convergence uniforme d'après le résultat précédent, l'approximation en 0 est en effet beaucoup moins fine qu'au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ (voir figure 4.4).

Dans le cas où la fonction f n'est pas nécessairement continue, on a seulement un résultat de convergence simple.

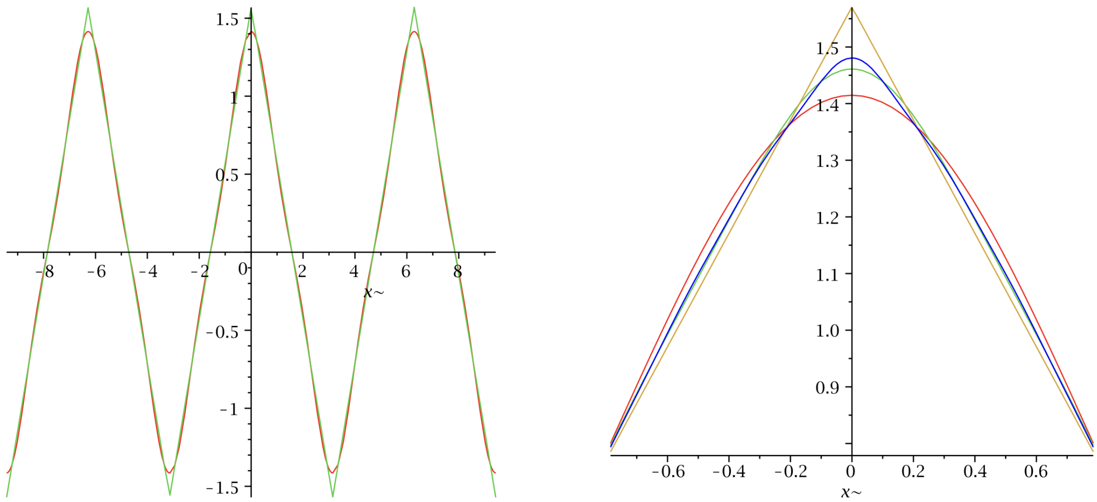

FIGURE 4.1 – fonction dent de scie et $S_5(f)$, $S_{11}(f)$, $S_{27}(f)$ (gauche) ; zoom au voisinage de 0 (droite)

Théorème 4.4.2. *(théorème de Dirichlet) Soit f une fonction 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, $(S_N(f))$ converge simplement vers la fonction $\tilde{f}$ définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par*

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

où $f(x^+) := \lim_{h\to 0^+} f(x+h)$ et $f(x^-) := \lim_{h\to 0^-} f(x+h)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de x. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$S_N(f)(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x).$$

Remarque 4.4.3. En particulier, si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue en x, alors

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f) e^{inx}.$$

Le théorème de Dirichlet permet de calculer des sommes de séries.

Exemple 4.4.4. Considérons la fonction créneau f de période 2π.

- Pour tout $x \neq m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\left((2k+1)x\right).$$

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} (-1)^k = \frac{4}{\pi} \arctan(1).$$

On retrouve bien le fait que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

- Pour tout x de la forme $x = m\pi$, avec $m \in \mathbf{Z}$, on retrouve bien le fait que

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\left((2k+1)x\right).$$

En particulier, si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge simplement vers f. En revanche, si f est seulement continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier ne converge pas nécessairement (même simplement). Le théorème suivant garantit que, si l'on prend à la place les moyennes de Césaro, on a la convergence uniforme.

Théorème 4.4.5. *(théorème de Féjer) Soit f une fonction 2π-périodique et continue. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, posons*

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f).$$

Alors $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

En particulier, toute fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques et donc d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4.5 Coefficients de Fourier réels

Considérons une fonction $f \in E$ mais cette fois-ci à valeurs réelles. Plutôt que de chercher à l'approcher par des polynômes trigonométriques complexes, il est naturel de l'approcher par des polynômes trigonométriques réels, à savoir des fonctions de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

Les fonctions $x \mapsto \cos(kx)$ et $x \mapsto \sin(kx)$ sont continues, 2π-périodiques, orthogonales pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et vérifient, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

En remarquant que $c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)}$, et en utilisant le fait que $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$, on obtient que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$S_N(f)(x) = c_0(f) + 2\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}(c_k(f)) \cos(kx) - 2\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Im}(c_k(f)) \sin(kx).$$

Cela conduit à poser, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_0(f) &= c_0(f) \\
b_0(f) &= 0 \\
a_k(f) &= 2\mathrm{Re}(c_k(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \mathrm{d}t, \\
b_k(f) &= -2\mathrm{Im}(c_k(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Définition 4.5.1. *Les quantités $a_k(f)$ et $b_k(f)$, $k \geq 0$, apparaissant ci-dessus s'appellent les **coefficients de Fourier réels** de f.*

Proposition 4.5.2. *Soit $f \in E$ une fonction réelle.*

1. *Pour tout $k \geq 1$, l'harmonique de rang k est*

$$H_k(f) : x \mapsto a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx).$$

2. *Pour tout $N \geq 0$, la série de Fourier d'ordre N est*

$$S_N(f) : x \mapsto a_0(f) + \sum_{k=1}^{N} H_k(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{N}(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)).$$

Tous les résultats formulés en termes de polynômes trigonométriques complexes peuvent se reformuler dans le cas réel ; en particulier les résultats de convergence quadratique, simple, uniforme et normale. L'égalité de Parseval s'écrit cette fois-ci sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t = a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)^2.$$

L'un des intérêts d'utiliser les coefficients de Fourier réels est qu'ils sont plus simples à calculer dans le cas où f est une fonction (réelle) paire ou impaire. En effet,

- si f est paire, alors $b_k(f) = 0$ pour tout $k \geq 1$;
- si f est impaire alors $a_k(f) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Cependant, en termes d'énoncés et de preuves, il est plus naturel d'utiliser les coefficients de Fourier complexes, en particulier parce que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ est orhonormée tandis que les fonctions $x \mapsto \cos(kx)$ et $x \mapsto \sin(kx)$ sont orthogonales mais ne sont pas normées.