Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités
L2 mathématiques
Année 2025-2026

Fiche n°1. Quelques notions pour les probabilités.

---

1. Théorie des ensembles

Exercice 1. Posons $A = [0, 2]$, $B =]1, 4]$ et $C = \{1, 2\}$.

(1) Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$, $B \setminus A$, $A \times B$.
(2) Déterminer $\mathcal{P}(C)$.

Exercice 2. Soit $f : \{a, b, c, d, e\} \to \{a, b, c, d, e\}$ la fonction définie par :

$$f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = e,\ f(d) = b,\ f(e) = a.$$

(1) Posons $A = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $f(A)$.
(2) Posons $B = \{b, d\}$. Déterminer $f^{-1}(B)$.

2. Dénombrement

Exercice 3. Une course oppose 20 concurrents, dont Emile.

(1) Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
(2) Combien y-a-t-il de podiums possibles où Emile est premier ?
(3) Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Emile fait partie ?
(4) On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 4. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

(1) Dans cette question, on s'autorise à ce que les chiffres puissent éventuellement être les mêmes.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
(2) Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 5. Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

(1) A ;
(2) A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents ;
(3) A_2, ensemble des nombres pairs de A ;
(4) A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 6. On s'intéresse à la somme des cardinaux des parties de E.

(1) Justifier que $\sum_{A\in\mathcal{P}(E)}|A| = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

(2) Soit x un nombre réel. En utilisant le fait que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, donner une expression de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$.

(3) En déduire que $\sum_{A\in\mathcal{P}(E)}|A| = n2^{n-1}$.

3. Dénombrabilité

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe une injection $i : E \to F$.

(1) Montrer que si F est dénombrable, alors E est dénombrable.

(2) Montrer que si E n'est pas dénombrable, alors F n'est pas dénombrable.

Exercice 8. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables :
$2\mathbf{N}$? $\mathbf{N}\times\{1,2,3\}$? $\{1,3,6,7\}$? $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$? $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$? $\mathbf{Q}^3$? $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$? $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$? $(\mathbf{Q}\cap[0,1])\cup\{7,8,9\}$? $\{1,2\}^4$?

Exercice 9. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

(1) $\{2^n : n\geq 0\}$;

(2) $\mathbf{N}\times\mathbf{R}$;

(3) $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbf{Q}\}$;

(4) l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 10. (1) Démontrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$ est dénombrable.

(2) On suppose que l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ est dénombrable et on note $f : \mathbf{N}\to\mathcal{P}(\mathbf{N})$ une bijection. En considérant l'ensemble $\{n\in\mathbf{N} : n\notin f(n)\}$, trouver une contradiction.

4. Séries numériques

Exercice 11. (1) Justifier que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

(2) Soit $x\in\mathbf{R}$. Pour quelles valeurs de x la série de terme général x^n converge ? Calculer, le cas échéant, la somme $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

(3) Soit $x\in\mathbf{R}$. Pour quelles valeurs de x la série de terme général nx^n converge ? Calculer, le cas échéant, la somme $\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$.

Exercice 12. Donner la nature des séries numériques $\sum_{n\geq 0}u_n$ suivantes :

(1) $u_n = 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$;

(2) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.