Fiche n°2. Evénements.

Exercice 1. Proposer un univers Ω pour les expériences aléatoires suivantes et dénombrer les résultats possibles.

(1) On lance un dé à 6 faces.
(2) On lance un dé à 6 faces et un autre à 20 faces.
(3) On tire trois cartes (simultanément) dans un jeu de 52 cartes.

Exercice 2. Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

(1) seul A se réalise ;
(2) les événements A et B se réalisent, mais pas C ;
(3) les trois événements se réalisent ;
(4) au moins l'un des trois événements se réalise ;
(5) au moins deux des trois événements se réalisent ;
(6) aucun ne se réalise ;
(7) au plus l'un des trois se réalise ;
(8) exactement deux des trois se réalisent ;

Exercice 3. (1) Dans une classe de 36 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins soient nés le même jour ? (on considère que l'année compte 365 jours, et que toutes les dates d'anniversaires sont indépendantes et équiprobables).

(2) Généraliser ce résultat pour une classe de n élèves.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A, B deux événements. On suppose que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{8}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}.$$

Calculer $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B^c)$, $\mathbb{P}(B \cap A^c)$.

Exercice 5. On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Exercice 6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) Deux événements incompatibles sont indépendants ;
(2) Deux événements indépendants sont incompatibles ;
(3) Si $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, alors $A = B$;
(4) Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(1) Soient A et B deux événements tels que $A \subset B$.

  (a) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(B)$ si $\mathbb{P}(A) = 1$?

  (b) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) = 0$?

(2) Soit (A_n) une suite d'événements telle que $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

(3) Soit (A_n) une suite d'événements telle que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Exercice 9. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que l'on ait deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.08$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.52$ et $\mathbb{P}(A) = 2\,\mathbb{P}(B)$.

(1) Déterminer les probabilités des évènements A et B.

(2) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 10. La famille Potter comporte deux enfants. Considérons les événements A : "il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter" et B : "la famille Potter a au plus une fille". On suppose que le sexe de chaque enfant est équiprobable et indépendant de celui des autres.

(1) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

(2) Même question si la famille Potter comporte trois enfants.

(3) Même question si la famille Potter comporte n enfants, $n \geq 1$.

Exercice 11. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B | A \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B | A)$.

Exercice 12. En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), et deux sur cinq prennent un autre médicament M.

— avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés ;

— avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

(1) Quelle est la proportion de personnes soulagées ?

(2) Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 13. Dans une usine, la machine A fabrique 60% des pièces, dont 2% sont défectueuses. La machine B fabrique 30% des pièces, dont 3% sont défectueuses. La machine C fabrique 10% des pièces, dont 4% sont défectueuses.

(1) On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

(2) On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ? par la machine B ? par la machine C ?

Exercice 14. On cherche un objet dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p. Sachant qu'on a examiné les six premiers tiroirs sans succès, montrer que la probabilité qu'il soit dans le septième est égale à $\frac{p}{7-6p}$ (on suppose que la probabilité *a priori* que l'objet soit dans un tiroir est la même d'un tiroir à l'autre) ?

Exercice 15. Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes. Pour les autres, on suppose que :

— si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6 ;

— si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement "Le joueur gagne la partie n", et $u_n = \mathbb{P}(G_n)$.

(1) Montrer que $u_{n+1} = 0.3 + 0.3u_n$.

(2) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(G_n)$ au bout d'un grand nombre de parties ?

Exercice 16. Soit $N \geq 1$ un entier. Considérons un tournoi qui se déroule selon les modalités suivantes :

— au temps 1, les joueurs J_0 et J_1 s'affrontent ;

— à chaque temps $n > 1$, un nouveau joueur J_n affronte le vainqueur du match au temps $n-1$.

Soit G_n l'événement : "au temps n, le joueur J_n gagne". Supposons que les événements (G_n) soient indépendants et que $\mathbb{P}(G_n) = p \in]0,1[$ pour tout $n \geq 1$.

Un joueur est déclaré vainqueur du tournoi dès qu'il parvient à remporter N matchs consécutifs. Pour chaque $n \geq 1$, considérons l'événement E_n : "aucun joueur n'a remporté le tournoi à l'issue du match n".

(1) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n\geq 1}$ converge.

(2) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \leq N$.

(3) Montrer que $\mathbb{P}(E_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 17. On considère un carré $ABCD$ et son centre O. On note $\Gamma = \{A, B, C, D, O\}$. Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de Γ à un autre. La seule contrainte est que, si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci sont adjacents. Par exemple, une puce se trouvant en A peut sauter en B, D ou O ; une puce se trouvant en O peut sauter en A, B, C ou D. A chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit. Au départ, c'est-à-dire avant son premier saut, la puce se trouve au point O. Pour tout entier $n \geq 1$, on note O_n l'événement "la puce se trouve au point O à l'issue de son n-ième saut". On note $p_n = \mathbb{P}(O_n)$. On a donc $p_0 = 1$. On définit de même les événements A_n, B_n, C_n et D_n.

(1) Calculer p_1 et p_2.

(2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, démontrer les égalités

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(D_n).$$

On pourra raisonner par récurrence sur n.

(3) (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

(b) En déduire la valeur de p_n, pour $n \in \mathbf{N}$.

(c) Quelle proportion du temps la puce passe-t-elle sur chacun des sommets de Γ ?

Exercice 18. Soient $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Notons P_n l'ensemble des diviseurs premiers de n et définissons, pour tout $p \in P_n$, l'événement $A_p = \{a \in \Omega : p \text{ divise } a\}$.

(1) Montrer que $\mathbb{P}(A_p) = \frac{1}{p}$ pour tout $p \in P_n$.

(2) Montrer que les événements A_p, pour $p \in P_n$, sont indépendants.

(3) En déduire que la fonction d'Euler $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers k de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$, vérifie

$$\varphi(n) = n \prod_{p \in P_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Exercice 19. Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On pose

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n.$$

(1) Montrer que $\overline{\lim}\, A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe une infinité d'indices k vérifiant $\omega \in A_k$.

(2) Interpréter de même l'événement

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} A_n.$$

(3) Montrer les propriétés suivantes :

(a) $(\overline{\lim}\, A_n)^c = \underline{\lim}\, A_n^c$ et $\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$;

(b) $\overline{\lim}(A_n \cup B_n) = \overline{\lim}\, A_n \cup \overline{\lim}\, B_n$ et $\overline{\lim}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim}\, A_n \cap \overline{\lim}\, B_n$.