Université du Littoral Côte d'Opale
Agrégation interne
Année 2025-2026

Fiche n°2. Sujet d'analyse 2023.

---

1. Exponentielle de matrice

Exercice 1. Calculer l'exponentielle de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Equations différentielles linéaires

Exercice 2. Résoudre, en utilisant la méthode de variation de la constante, les équations différentielles suivantes :

(1) $y' = 2y + x$ sur $\mathbf{R}$.
(2) $y' = y - e^x$ sur $\mathbf{R}$.
(3) $y' = xy + x$ sur $\mathbf{R}$.
(4) $y' = -2y + xe^{-x}$ sur $\mathbf{R}$ avec condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 3. Désignons par (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :
$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

(1) Désignons par y une solution de l'équation (E) et posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Montrer que Y est solution de l'équation différentielle $Z' = AZ$, où A est une matrice 2×2 à déterminer.
(2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle $Z' = AZ$.
(3) En déduire l'ensemble des solutions de E.
(4) Déterminer un couple de solutions (y_1, y_2) de (E) dont le wronskien s'annule en un certain point. *Rappel : le wronskien w d'un tel couple est défini par :*
$$\forall x \in [0,1],\ w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

3. Convergence d'une suite de fonctions

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, par
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

(1) Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
(2) Montrer que la convergence n'est pas uniforme.
(3) Montrer que, pour tout $a \in [0,1[$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$. Ce résultat illustre-t-il le théorème de Dini ?