Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités
L2 mathématiques
Année 2025-2026

Fiche n°3. Variables aléatoires.

Exercice 1. Un joueur lance trois fois une pièce de monnaie non truquée. Il gagne deux euros si le résultat est "pile" et perd un euro si le résultat est "face". On désigne par X le gain (ou la perte) du joueur au bout des trois lancés.

(1) Donner l'univers Ω associé à l'expérience.
(2) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de X.
(3) Calculer la loi de X.

Exercice 2. (1) On lance un dé vingt fois. Quelle est la loi du nombre de 5 obtenus ? Quelle est la probabilité d'obtenir moins de trois fois un 5 ?
(2) Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. Quelle est la loi du nombre de boules blanches dans l'urne ?
(3) Au bord de l'A7, un étudiant fait du stop. En cette saison, un vingtième des automobilistes s'arrête pour prendre un stoppeur. Quelle est la loi du nombre de véhicules que l'étudiant verra passer jusqu'à ce qu'il trouve un chauffeur ? Quelle est la probabilité qu'il monte dans la quatrième voiture qui passe ? Quelle est la probabilité qu'il voit passer au moins 6 voitures qui ne s'arrêtent pas ?

Exercice 3. On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini E telle que $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que X suit la loi uniforme.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$. Considérons une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ de loi vérifiant :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}.$$

Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$.

Exercice 6. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10h et 11h, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que 3,4,5 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

(1) Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
(2) Quelle est la probabilité pour qu'au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Exercice 7. (1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $n - X$ suit la loi $\mathcal{B}(n, 1 - p)$.

(2) Cent bovins se répartissent au hasard et indépendamment les uns des autres dans trois étables E_1, E_2, E_3. On suppose que chaque étable peut abriter la totalité du troupeau. Soit X_k la variable définie par le nombre de bovins ayant choisi l'étable E_k.
   (a) Déterminer les lois de probabilités de ces trois variables.
   (b) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

(1) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
(2) Déterminer la loi de $X - Y$ et de $X + Y$.

Exercice 9. Désignons par X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

(1) Déterminer $\mathbb{P}(X > k)$, pour tout $k \geq 1$.
(2) En déduire que, pour tous $k, n \geq 1$
$$\mathbb{P}(X > k + n | X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$
Que peut-on dire de X ?

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs dans $\{0, 1\}$, dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$\frac{1}{2} - a$	$a + \frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6} - 2a$

(1) Quelles valeurs sont autorisées pour a et b ?
(2) Calculer en fonction de a et b les lois marginales de (X, Y).
(3) Déterminer la loi de $X + Y$.
(4) Quelles valeurs de a et b correspondent à un couple (X, Y) de variables indépendantes ?

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et Y la variable aléatoire telle que la loi de Y sachant $X = k$ est uniforme sur $\{1, 2, \dots, k\}$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

(1) Quelle est la loi de $X + Y$?
(2) Soit un entier $n \geq 0$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 13. Soit un entier $n \geq 1$, et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Considérons $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

(1) Quelle est la loi du couple (X_1, S_n) ?
(2) Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant $S_n = k$?
(3) Quelle est la loi conditionnelle de S_n sachant $X_1 = i$?

Exercice 14. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{Z}$ telles que $X + Y$ est déterministe. Montrer que X et Y sont déterministes.

Exercice 15. Soient $n \geq 2$ un entier, $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis non vides et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Montrer que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

Exercice 16. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $\min\{X, Y\}$.

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\mathbb{P}(X < \infty) = 1$ si et seulement si $\mathbb{P}(X \geq n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 18. Soient $p \in]0, 1[$ et $k \geq 0$. Pour $n \geq 1$, considérons X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. A l'aide d'un couplage, montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} &\longrightarrow [0, 1] \\ n &\longmapsto \mathbb{P}(X_n \geq k) \end{aligned}$$

est croissante.

Exercice 19. Soit X une variable aléatoire discrète finie prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1, \ldots, n$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i),$$

avec la convention $x \log(x) = 0$ si $x = 0$.

(1) Démontrer que $H(X) \geq 0$.

(2) Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante, c'est-à-dire s'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $p_i = 1$.

(3) Vérifier que, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a
$$(-np_k) \log(np_k) \leq 1 - np_k,$$
avec égalité si et seulement si $np_k = 1$.

(4) En déduire que $H(X) \leq \log(n)$.

(5) Démontrer que $H(X) = \log(n)$ si et seulement si X est équidistribuée.