

1. SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. (1) Justifier que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(2) Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour quelles valeurs de x la série de terme général x^n converge ? Calculer, le cas échéant, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

(3) Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour quelles valeurs de x la série de terme général nx^n converge ? Calculer, le cas échéant, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

Exercice 2. Donner la nature des séries numériques $\sum_{n \geq 0} u_n$ suivantes :

(1) $u_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$;

(2) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

2. SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$;

(2) $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(2n)!} x^n$;

(3) $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{2n!}} x^n$;

(4) $\sum_{n \geq 1} (\ln n) x^n$.

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On désigne par R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$.

(1) Montrer que $R = 1$.

(2) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

(3) En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 5. Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes puis préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

(1) $\ln(1 + 2x^2)$;

(2) $\frac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$;

(3) $\frac{e^x}{1-x}$.

3. THÉORÈMES D'INTÉGRATION

Exercice 6. En appliquant le théorème de convergence dominée, déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, des suites suivantes :

(1) $\left(\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt \right)_{n \geq 0}$;

(2) $\left(\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^n} \right)_{n \geq 0}$;

(3) $\left(\int \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx \right)_{n \geq 1}$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. Montrer que

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbf{R}_+} f(x, y) dx \right) dy \neq \int_{\mathbf{R}_+} \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Que peut-on en déduire ?