Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités
L2 mathématiques
Année 2023-2024

Fiche n°4. Espérance de variables aléatoires réelles.

Exercice 1. Retrouver les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant :

(1) la loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in [0,1]$;
(2) la loi $\mathcal{B}(n,p)$, avec $n \geq 1$ et $p \in [0,1]$;
(3) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \geq 0$.

Exercice 2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout entier n. Pour $n \geq 1$, posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Montrer que S_n admet une espérance et la calculer.
(2) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $e^{\lambda S_n}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 3. Une entreprise souhaite recruter un cadre. Un nombre n de personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

(1) Déterminer la loi de X.
(2) En dérivant l'expression $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour tout $x \neq 1$.
(3) En déduire l'espérance de X.
(4) Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Exercice 4. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de trois lettres sur cinq au tarif urgent, les autres au tarif normal.

(1) Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
— A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent" ?
— B : "Exactement deux médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent" ?
(2) Soit X la variable aléatoire : "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres". Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? sa variance ?

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

(1) Quelle est la loi de Y_n ? Les variables aléatoires Y_n, $n \geq 1$, sont-elles deux à deux indépendantes ?
(2) Calculer l'espérance et la variance de U_n.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Trouver le réel a minimisant la quantité $\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]$.

Exercice 7. Soient $n \geq 2, m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Définissons la variable aléatoire Z par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) \text{ si } X_2(\omega) \leq m; \\ X_2(\omega) \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) Comparer les espérances des variables aléatoires X_1, X_2 et Z.

(2) Déterminer les valeurs de m qui maximisent l'espérance de Z.

Exercice 8. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles, discrètes, indépendantes et de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ indépendante de $(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, avec la convention $S_0 = 0$.

Exercice 9. On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de "face" parmi les deux premiers lancers et Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de "pile" parmi les deux derniers lancers.

(1) Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité du couple (X, Y).

(2) Donner les marginales de (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(3) Calculer les espérances et les variances de X et de Y.

(4) Calculer la covariance du couple (X, Y).

Exercice 10. On lance deux dés équilibrés et on note U_1, U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On pose $X = \min\{U_1, U_2\}$ et $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

(1) Donner la loi de X. En déduire $\mathbb{E}[X]$.

(2) Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 ; en déduire $\mathbb{E}[Y]$.

(3) Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 ; en déduire la covariance du couple (X, Y).

(4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

(1) Déterminer la loi de U.

(2) Soit un entier naturel $n \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $\{U = n\}$.

(3) Déterminer la loi de T.

(4) (a) Calculer $\mathrm{Cov}(U, T)$.

(b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 12. (1) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; puis une loi binomiale de paramètres n et p.

(2) Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

(3) Montrer que $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$ et $\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercice 13. En utilisant les fonctions génératrices, montrer que :

(1) si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et suivent les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ respectivement (avec $\lambda, \mu \geq 0$), alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$;

(2) si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et suivent les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$ respectivement (avec $n_1, n_2 \geq 1$ et $p \in [0, 1]$), alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Exercice 14. Construisons récursivement une suite (G_n) de graphes aléatoires :

— G_2 est le graphe avec deux sommets numérotés 1 et 2 avec une arête les joignant ;

— pour tout $n \geq 2$, G_{n+1} se déduit de G_n en ajoutant un sommet numéroté $n+1$ et une arête entre le nouveau sommet et un sommet X_{n+1} choisi aléatoirement dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ de sorte que $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ soit proportionnel à $\deg(k)$ pour tout $k \leq n$ et X_{n+1} est indépendante de la construction précédente.

On étudie la variable aléatoire D_n, définie comme le degré du sommet 1 dans le graphe G_n.

(1) Etant donnée une réalisation du graphe G_n, que peut-on dire de la somme des degrés des sommets du graphe G_n ?

(2) Justifier que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | D_n = k) = \frac{k}{2(n-1)}$ pour tout $k \leq n - 1$.

(3) En remarquant que $D_{n+1} = D_n + \mathbf{1}_{X_{n+1}=1}$, montrer que

$$\mathbb{E}[D_{n+1}] = \mathbb{E}[D_n] \left(1 + \frac{1}{2(n-1)}\right).$$

(4) En déduire une expression de $\mathbb{E}[D_n]$.

(5) Montrer que $\mathbb{E}[D_n] \underset{n\to\infty}{\sim} C\sqrt{n}$, où $C > 0$ est une constante à déterminer.

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ de fonction génératrice égale à

$$G(z) = a \exp(1 + z^2),$$

pour $z \in \mathbf{R}$ et pour un certain $a \in \mathbf{R}$.

(1) Trouver la valeur de a.

(2) Déterminer la loi de X.

(3) Est-ce que X admet une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 16. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ de fonction génératrice égale à $G_X(z) = 1 - \sqrt{1 - z}$ pour $|z| < 1$.

(1) Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour $n \geq 0$.

(2) Soit Y une variable aléatoire indépendante de même loi que X, définie sur le même espace probabilisé que X. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = n)$.

(3) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Exercice 17. Montrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés à six faces numérotés de 1 à 6 de façon à ce que la somme des points obtenus en les lançant indépendamment suive la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, \ldots, 12\}$. *Indication : utiliser le fait que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$ alors sa fonction génératrice est un polynôme de degré 6.*

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, N\}$. Démontrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 19. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et $1 \leq k \leq p$ deux entiers. Supposons que $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] < \infty$. Montrer, en introduisant une indicatrice judicieusement choisie, que $\mathbb{E}\left[|X|^k\right] < \infty$.

Exercice 20. Soit X une variable aléatoire réelle.

(1) Montrer que, pour toute fonction strictement croissante $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$,
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[f(|X|)\right]}{f(a)}.$$

(2) Supposons, de plus, que X est à valeurs positives et que pour tout $t > 0$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance. Montrer que
$$\forall a > 0, \forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(X \geq a\right) \leq e^{-ta}\mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

Exercice 21. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

(1) Supposons que X admet une espérance. Montrer que $\mathbb{P}\left(X > 0\right) \leq \mathbb{E}\left[X\right]$.

(2) Supposons que X^2 admet une espérance non nulle. Montrer que $\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \mathbb{P}\left(X > 0\right)$ et que $\mathbb{P}\left(X = 0\right) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X^2]}$.

Exercice 22. (1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et soit $\epsilon > 0$. Démontrer que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

(2) On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100.

Exercice 23. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. On note $X \preceq Y$ si, pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$\mathbb{P}\left(X \geq t\right) \leq \mathbb{P}\left(Y \geq t\right).$$

(1) Montrer que $X \preceq Y$ si et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ croissante et bornée,
$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[h(Y)\right].$$

(2) On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Montrer que $X \preceq Y$ si et seulement si $\lambda \leq \mu$.

(3) On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et que $X \preceq Y$. Montrer que $\mathbb{P}\left(X \leq Y\right) \geq \frac{1}{2}$.