Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités & Statistiques
Ing 1
Année 2025-2026

Fiche n°4. Estimation.

1. Estimation ponctuelle

Exercice 1. Le staff médical d'une grande entreprise fait ses petites statistiques sur le taux de cholestérol de ses employés. Les observations faites sur 100 employés tirés au sort sont les suivantes :

Taux de cholestérol (en cg)	Effectif d'employés
120	9
160	22
200	25
240	21
280	16
320	7

Donner des estimations ponctuelles de la moyenne et de l'écart-type pour le taux de cholestérol dans toute l'entreprise, en précisant quelles hypothèses sont faites.

Exercice 2. Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Posons $\hat{\theta}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

(1) Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ.

(2) Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur non biaisé de θ.

(3) Calculer le risque quadratique de $\hat{\theta}_n$.

2. Intervalles de confiance

Exercice 3. Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon de moyenne inconnue μ et de variance connue σ^2. Notons $\hat{\mu} = \overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ la moyenne empirique.

(1) Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 1[$, on a
$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\hat{\mu} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}u_{1-\alpha/2},\ \hat{\mu} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}u_{1-\alpha/2}\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha,$$
où $u_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile de la loi normale centrée réduite.

(2) Sur les cinquante dernières années, on a relevé en France une pluviométrie annuelle moyenne de 800mm pour un écart-type connu de 100mm. Déterminer un intervalle de confiance (asymptotique) de la moyenne au niveau de confiance de 90% en précisant quelles hypothèses sont faites.

Exercice 4. Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Notons $\hat{p}$ la proportion empirique.

(1) Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 1[$, on a
$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}u_{1-\alpha/2},\ \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}u_{1-\alpha/2}\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha,$$
où $u_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile de la loi normale centrée réduite.

(2) On veut étudier la proportion p de gens qui vont au cinéma chaque mois. On prélève un n-échantillon de taille $n = 100$. On observe une proportion $\hat{p}(\omega) = 0.1$ de gens qui vont chaque mois au cinéma. Donner un intervalle de confiance pour p de niveau de confiance 90% issu de l'observation.

Exercice 5. On considère un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$.

(1) Vers quoi converge $\overline{X_n}$?

(2) Justifier que $\sqrt{\frac{n}{\overline{X_n}}}(\overline{X_n} - \lambda)$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(3) En déduire un intervalle de confiance au niveau 95% pour λ.

(4) Le tableau ci-dessous donne les fréquences de valeurs issues d'un échantillon observé de taille 100.

Valeur	0	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0.07	0.20	0.33	0.20	0.10	0.08	0.02

(a) Calculer la moyenne empirique de l'échantillon.

(b) Donner un intervalle de confiance calculé à partir de cet échantillon au niveau de 95%.

Exercice 6. On suppose que le chiffre d'affaires mensuel d'une entreprise suive une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues. Sur les 12 derniers mois, on a observé les chiffres d'affaires (en kilo euros) suivants : 9; $9,8$; $10,3$; 7; $7,2$; $9,5$; $10,6$; $10,1$; 10; $8,9$; $8,7$; $11,1$.

(1) Donner des estimations ponctuelles de la moyenne et de la variance.

(2) On rappelle le résultat suivant : si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors les estimateurs $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ sont des statistiques indépendantes, de lois respectives données par :

$$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

En particulier,

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}} \sim \tau(n-1),$$

où $\tau(n-1)$ désigne la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

(a) Donner un intervalle de confiance pour la moyenne de niveau de confiance 90%.

(b) Donner un intervalle de confiance pour la variance de niveau de confiance 90%.

Exercice 7. On considère un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

(1) Montrer que la loi de la variable aléatoire $\lambda \max_{1 \le i \le n} X_i$ ne dépend pas de λ. En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre λ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

(2) Construire un intervalle de confiance pour λ au niveau $1 - \alpha$ en utilisant la statistique $\overline{X_n}$.