Fiche n°5. Théorèmes limites.

Exercice 1. Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} A_n\right) = 0$.

Exercice 2. Soit (A_n) une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} A_n\right) = 1$.

Exercice 3. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes telles qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant :

$$\mathbb{E}[X_k] = 0, \quad \mathbb{E}\left[X_k^4\right] \leq K.$$

Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Montrer que X_i^2 et X_i^3 admettent une espérance.

(2) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[S_n^4\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^4 + 6 \sum_{1\leq i<j\leq n} X_i^2 X_j^2\right].$$

(3) En utilisant le fait que $\mathbb{E}\left[X_i^2\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[X_i^4\right]$, en déduire que

$$\mathbb{E}\left[S_n^4\right] \leq nK + 3n(n-1)K \leq 3Kn^2.$$

(4) Montrer que $\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1}\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] \leq 3K\sum_{n\geq 1} n^{-2}$.

(5) En déduire que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles qui admettent une espérance et telles qu'il existe une variable aléatoire X vérifiant $\mathbb{E}[|X_n - X|] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers X.

Exercice 5. Soit (G_n) une suite de variables aléatoires de lois géométriques dont les paramètres forment une suite (p_n). Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Calculer, pour tout $u > 0$, la limite de $\mathbb{P}(G_n \leq un)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 6. Soit $k \geq 1$ un entier. Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, une variable aléatoire $X_i^{(n)}$. Supposons que, pour tout $1 \leq i \leq k$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X_i^{(n)}| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq k} |X_i^{(n)}| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 7. Soit X un variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout $n \geq 1$, considérons l'événement $A_n = \{X \geq \ln(n)/\ln(2)\}$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}\, A_n\right) = 0$ puis que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 8. Soit $\alpha > 0$ et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Est-ce que la suite (X_n) converge en probabilité ? Presque sûrement ?

Exercice 9. Soit $\lambda > 0$ et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Posons, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que $\mathbb{P}(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \leq e^{-cn}$ pour tout $n \geq 1$.

(2) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \varepsilon\right) \leq e^{-cn}$ pour tout $n \geq 1$.

(3) Déterminer la limite presque sûre de $\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Exercice 10. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires géométriques de paramètre $p \in]0,1[$ et $\alpha > 0$. Déterminer la probabilité que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n}$ converge presque sûrement.

Exercice 11. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé fini Ω. On suppose que les variables aléatoires ont même espérance m et même variance σ^2. On pose $\overleftarrow{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n - m| \geq \epsilon) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 12. Soient $X, X_0, X_1, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs entières (définies sur un même espace probabilisé). Notons, pour tout $k, n \in \mathbf{N}$, $p_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$ et $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.

(1) Montrer que la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

(2) Supposons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $p_{n,k} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} p_k$. Montrer que la suite de fonctions génératrices $(G_{X_n})_{n \geq 1}$ converge simplement vers G_X sur $[0, 1]$.

(3) Etablir la réciproque.

Exercice 13. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ pour tout i. Posons $S_0 = 0$ et $S_k = |X_1 + \cdots + X_k|$ pour tout $k \geq 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la suite $(U_k^{(n)})_{k \geq 0}$ de variables aléatoires par $U_0^{(n)} = n$ et $U_{k+1}^{(n)} = S_{U_k^{(n)}}$ pour tout $k \geq 1$.

(1) Démontrer que la suite $(U_k^{(n)})_{k \geq 0}$ converge presque sûrement vers une limite notée $U^{(n)}$.

(2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sup_{n \geq 0} U^{(n)}$.

Exercice 14. Soient $p \in]0,1[\setminus \{1, 2\}$ et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$. Posons $S_0 = 0$. Pout tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $A_n = \{S_n = 0\}$.

(1) Interpréter l'événement $\overline{\lim} A_n$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$.

(3) Lorsque $p = 1/2$, la formule de Stirling permet d'obtenir l'équivalent suivant :

$$\mathbb{P}(Z_{2n} = 0) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Peut-on en déduire directement que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim} A_n\right) = 1$ avec les lemmes de Borel-Cantelli ?