Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités & Statistiques
Ing 1
Année 2025-2026

Fiche n°5. Tests.

Exercice 1. Un laboratoire de chimie est chargé de conditionner des flacons d'eau de toilette destinés à une parfumerie. On définit une variable aléatoire X associant à chaque flacon le volume de son contenu exprimé en cm^3. On suppose que X suive une loi normale de moyenne μ (inconnue) et d'écart-type (connu) $\sigma = 0.036$. A l'occasion d'une commande, le parfumeur reçoit du laboratoire un lot de flacons. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la moyenne μ de la production, avec la valeur $\mu_0 = 43.041$ annoncée par le fournisseur, à partir d'un échantillon de taille $n = 75$. Dans tout ce qui suit, on oppose l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0$ à l'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

(1) Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$. En se plaçant sous l'hypothèse H_0, montrer que
$$\mathbb{P}\left(\overline{X}_n \in \left[\mu_0 - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \mu_0 + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1 - \alpha$$
(2) En déduire une zone de rejet de l'hypothèse H_0 au seuil de risque de 10%.
(3) Enoncer la règle de décision du test.
(4) Pour réaliser ce test, le parfumeur effectue un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 75 flacons pris dans le lot reçu. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

volume	$[42.930, 42.970[$	$[42.970, 43.010[$	$[43.010, 43.050[$	$[43.050, 43.090[$	$[43.090, 43.130]$
Effectif	2	7	29	19	18

Peut-on affirmer, au niveau de 10%, que la valeur μ_0 annoncée pour μ est correcte ?

Exercice 2. On souhaite contrôler la qualité de fonctionnement d'une usine produisant des ampoules électriques. On note p la probabilité qu'une ampoule produite soit défectueuse. On considère que la fabrication a un régime normale lorsqu'on a $p \leq 10^{-3}$.

(1) On prélève au hasard 500 ampoules indépendantes et on note X le nombre d'ampoules défectueuses de ce lot. Déterminer la loi de la variable aléatoire X. Donner une approximation de cette loi lorsque le régime est normal.
(2) A l'aide de la variable aléatoire X, construire un test permettant de déterminer si la fabrication a un régime normal ou si elle est détérioriée, sachant que l'on souhaite que la probabilité de conclure à tort que le régime est détérioré soit inférieure à 5%. Que peut-on conclure si on observe $X(\omega) = 3$?
(3) Supposons que p soit en réalité $3 \cdot 10^{-3}$. Quelle est la probabilité de déclarer cependant, à l'issue du test de niveau 5%, que le régime de fabrication est normal ?

Exercice 3. Le nombre de personnes dans une file d'attente donnée est une variable aléatoire de loi de Poisson. On a dénombré à dix dates différentes les personnes attendant au guichet de la banque postale d'une certaine ville, de telle sorte que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{10}$ associées soient indépendantes et de même loi $\mathcal{P}(\theta)$, où θ est inconnu.

(1) Déterminer la loi de $X = X_1 + \cdots + X_{10}$.
(2) Les valeurs observées sont : 3; 0; 1; 4; 2; 3; 1; 4; 0; 2. Peut-on accepter l'hypothèse selon laquelle il y a en moyenne moins d'une personne attendant au guichet de la banque postale au niveau 5% ? *Indication : utiliser le fait que* $\theta \mapsto \mathbb{P}(\mathcal{P}(\theta) \geq a)$ *est croissante.*