Toute tresse admet un représentant σ-défini court

Jean Fromentin

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Présentation de B_n

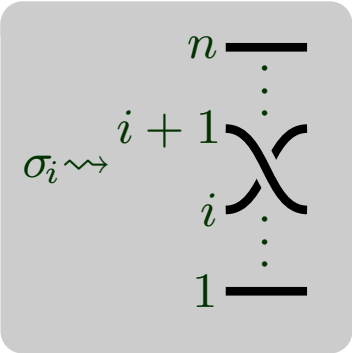
- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

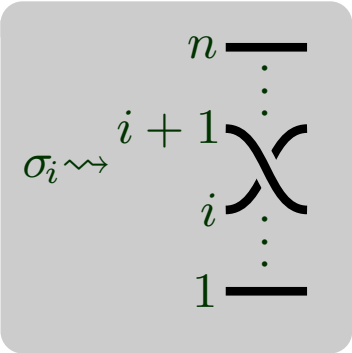
$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

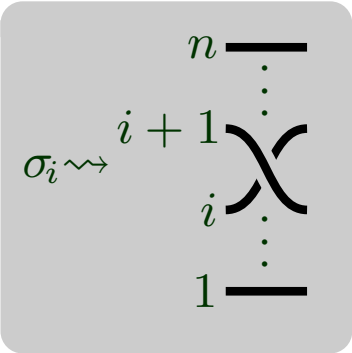
$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

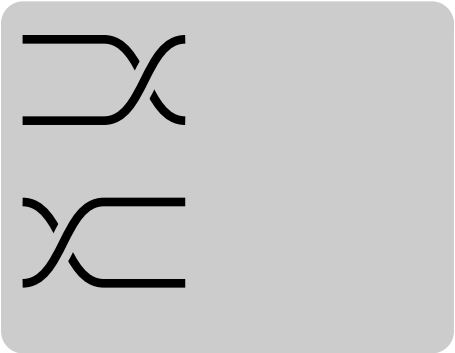


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

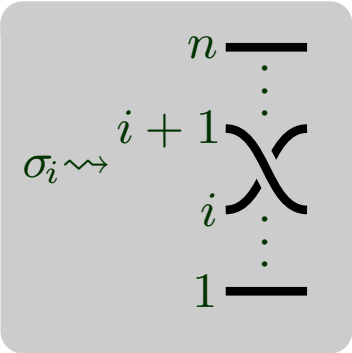


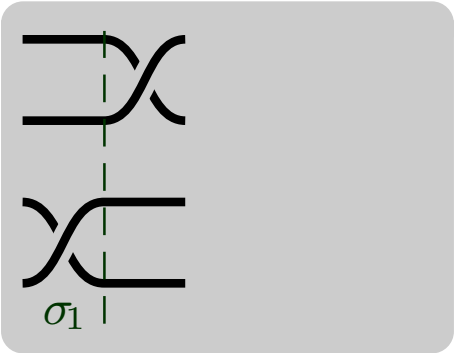


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

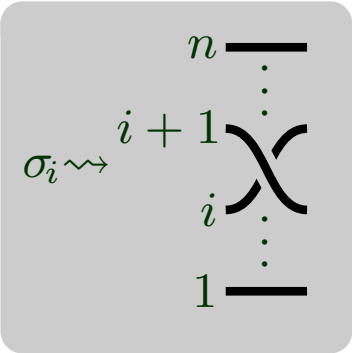


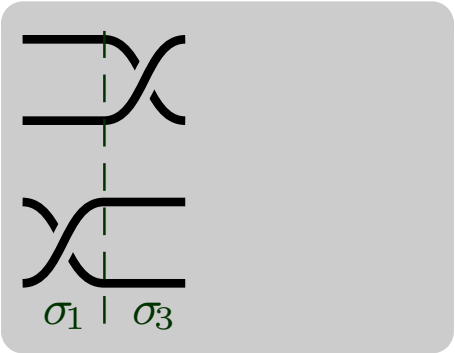


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

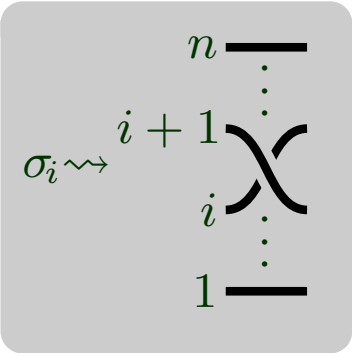


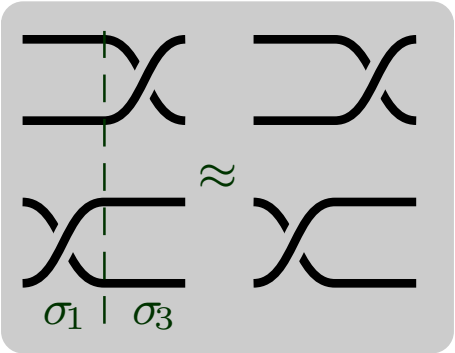


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

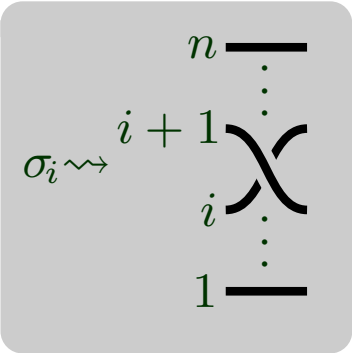


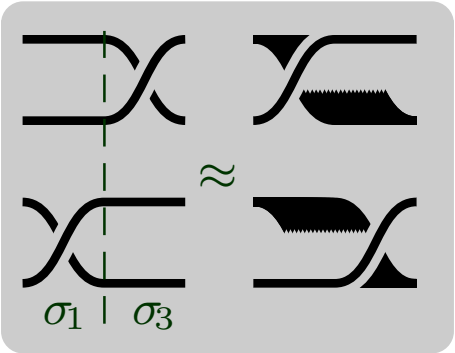


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

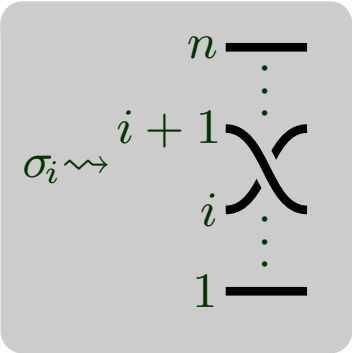


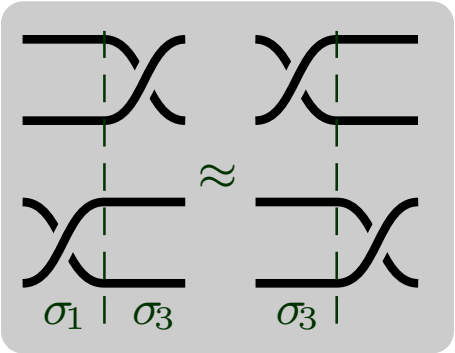


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

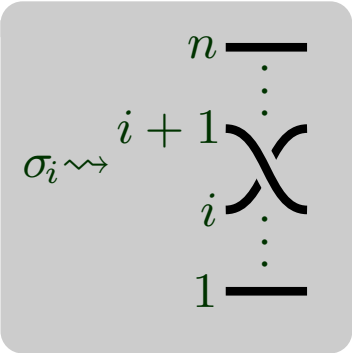


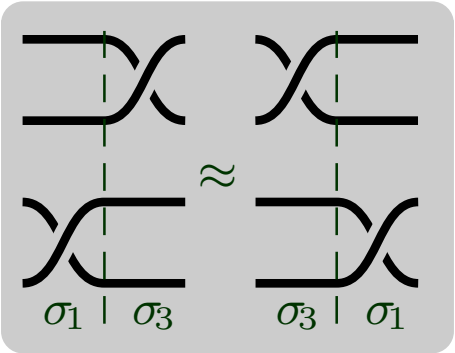


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

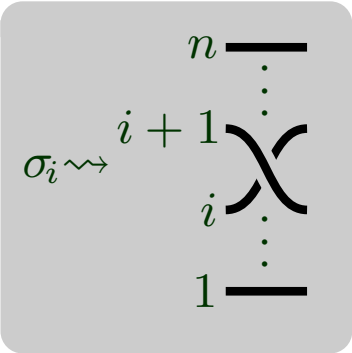


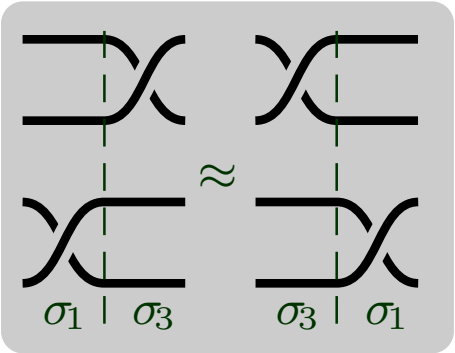


Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

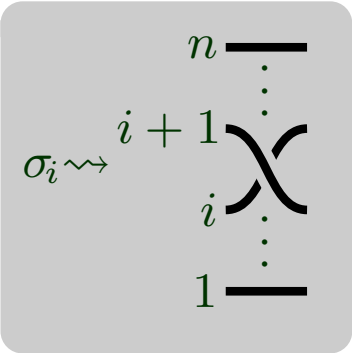


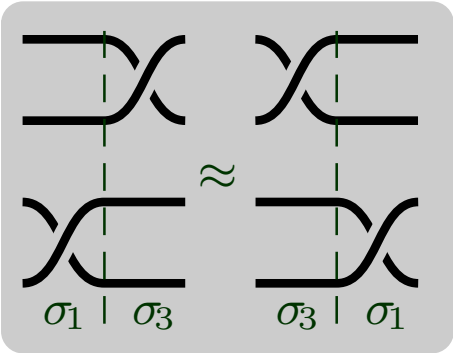


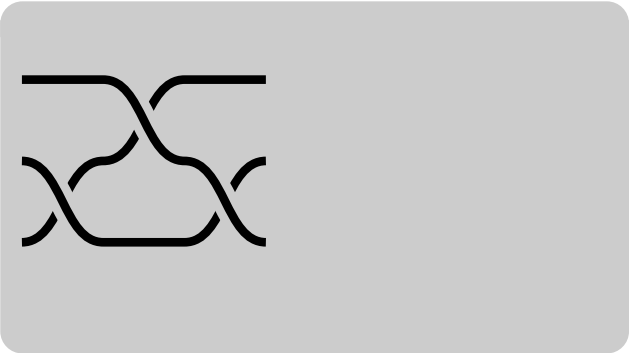
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



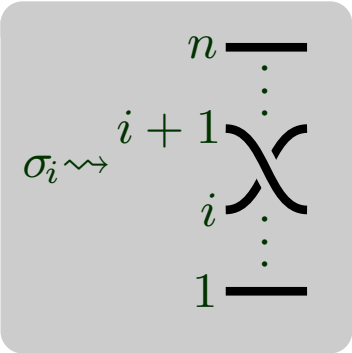


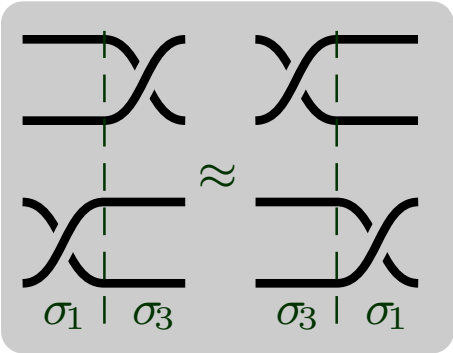


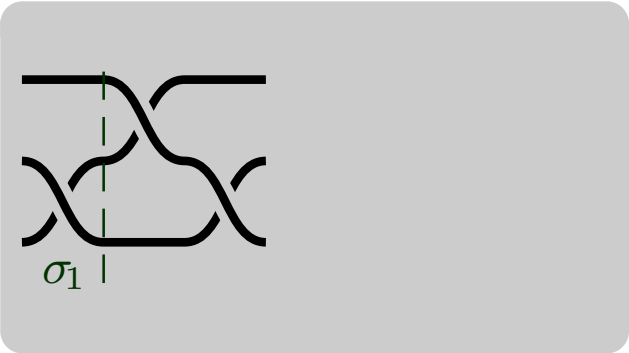
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



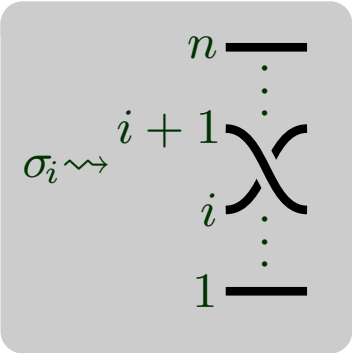


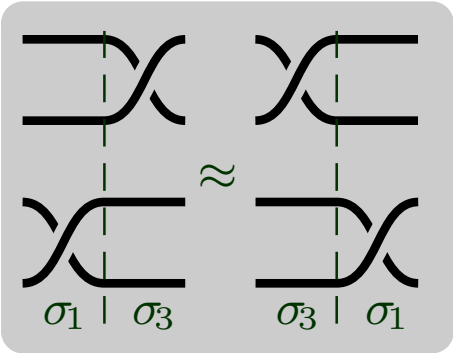


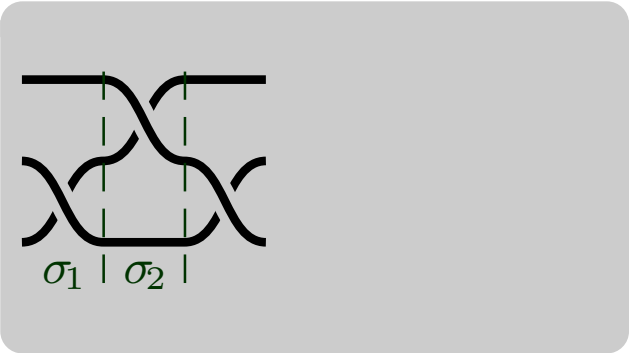
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



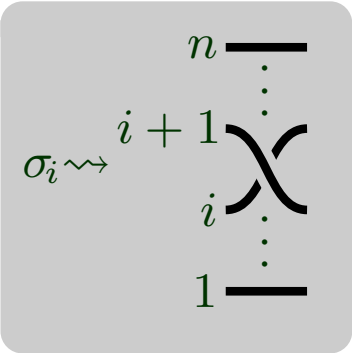


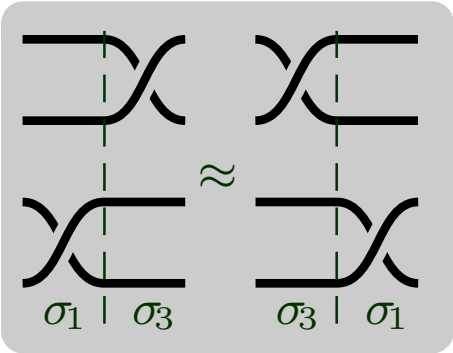


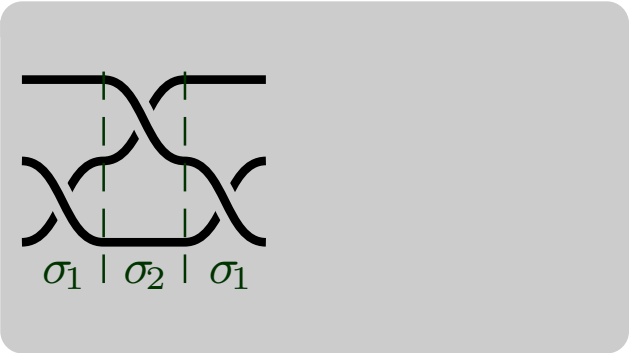
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



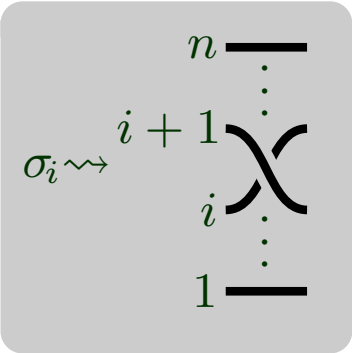


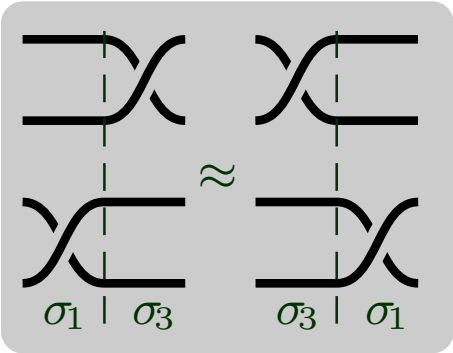


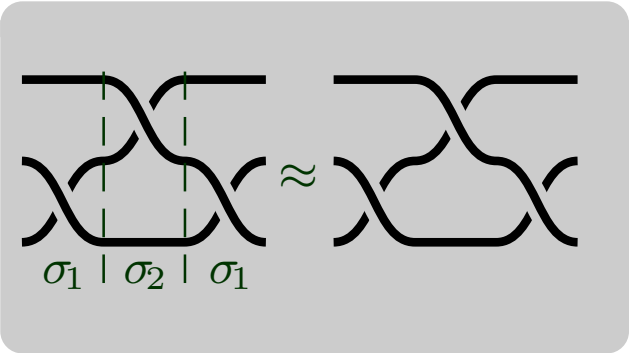
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



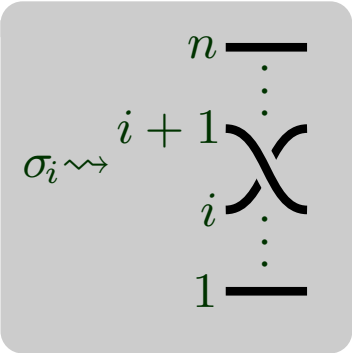


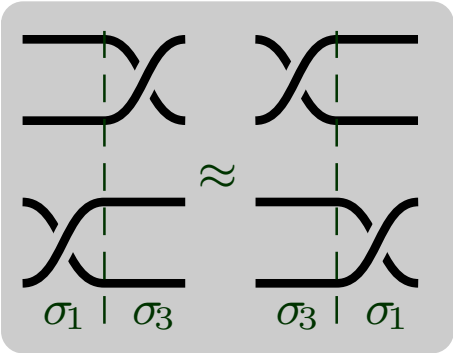


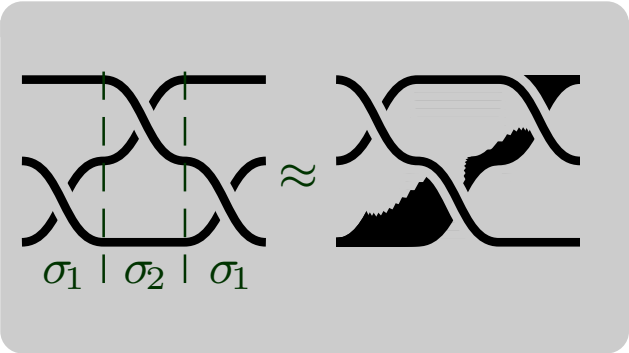
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



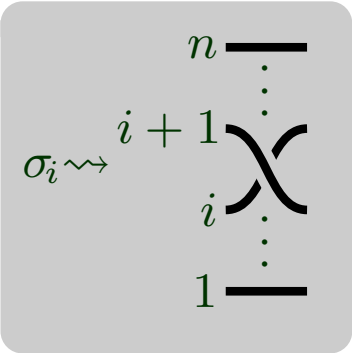


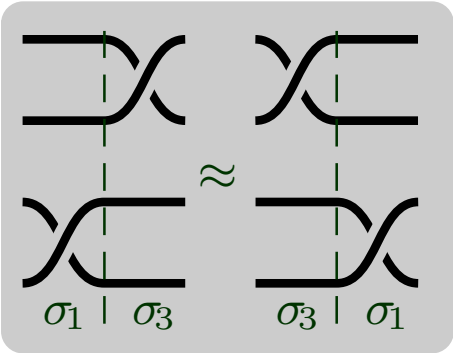


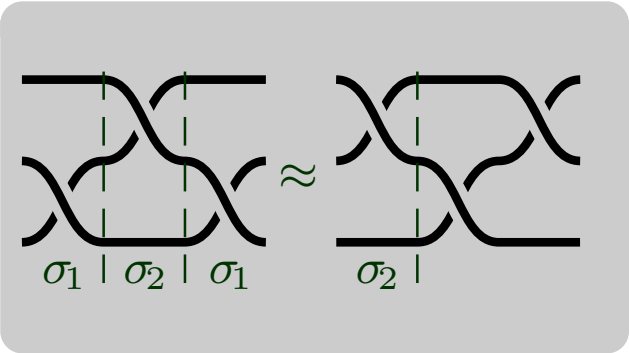
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



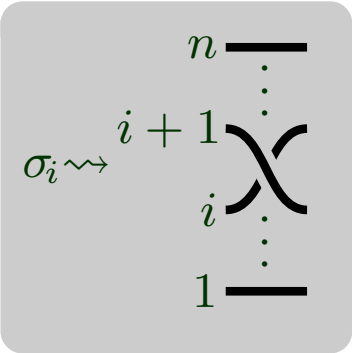


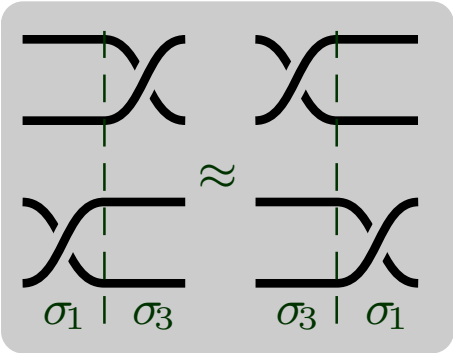


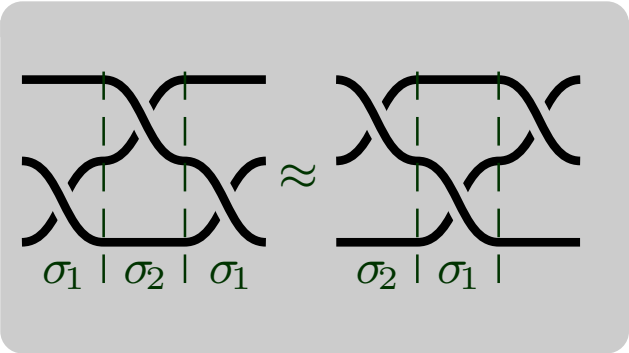
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



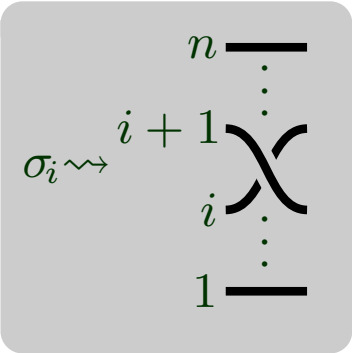


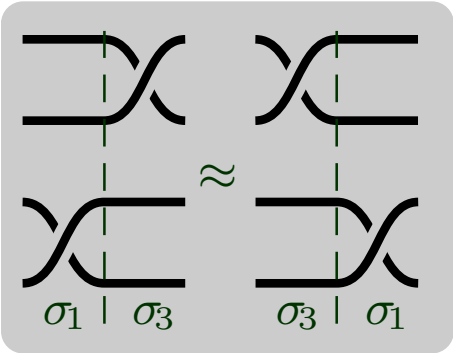


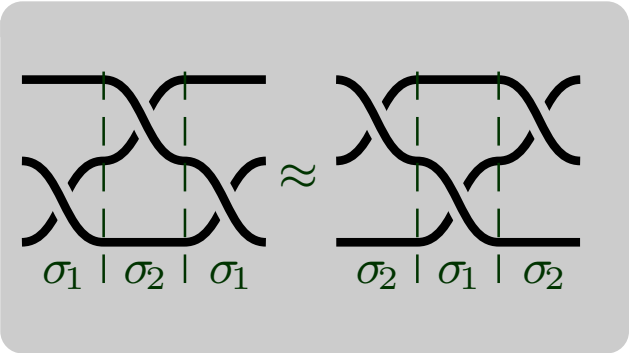
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



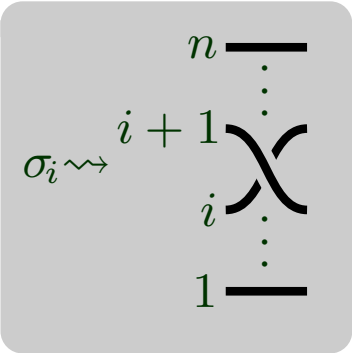


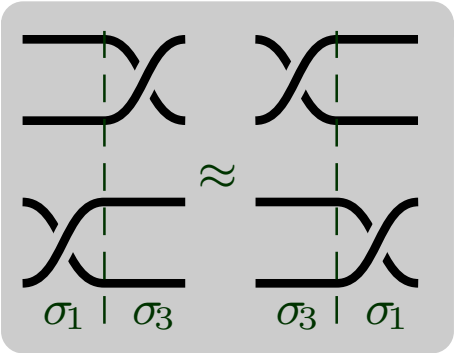


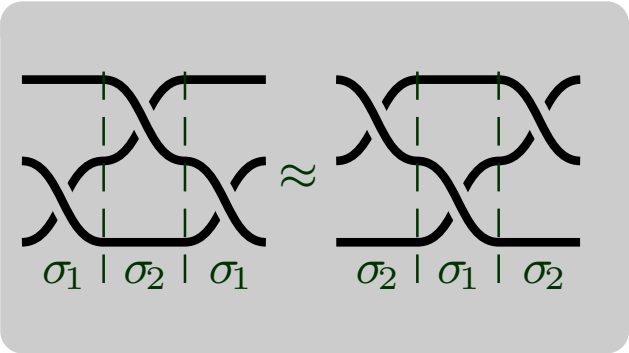
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$





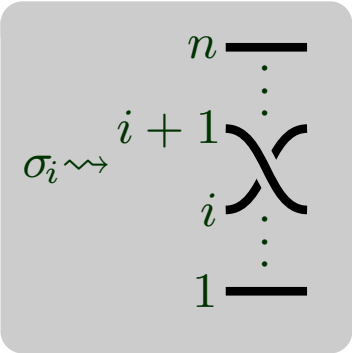


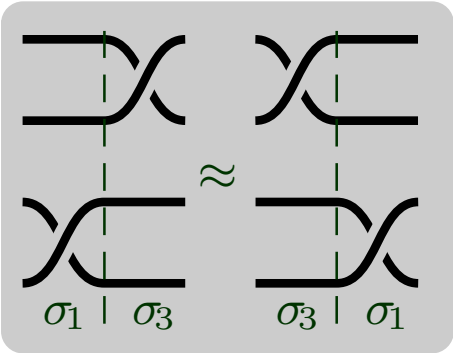
- Problème du mot : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalant pour les relations (1)

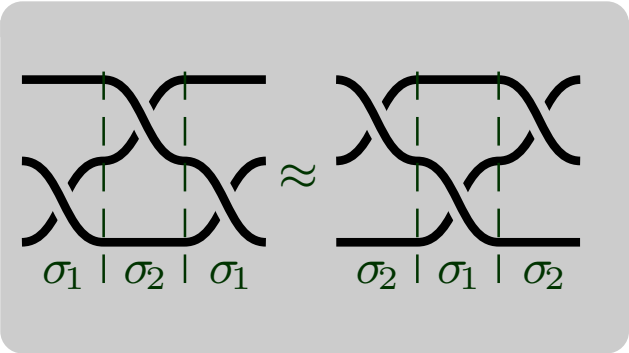
Présentation de B_n

- **Théorème** (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$





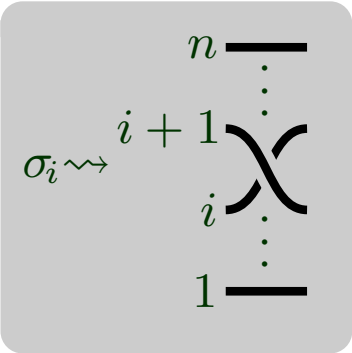


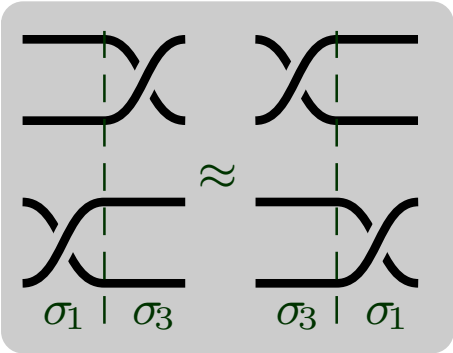
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalant pour les relations (1), *i.e.*, si $w \equiv w'$ est vérifiée.

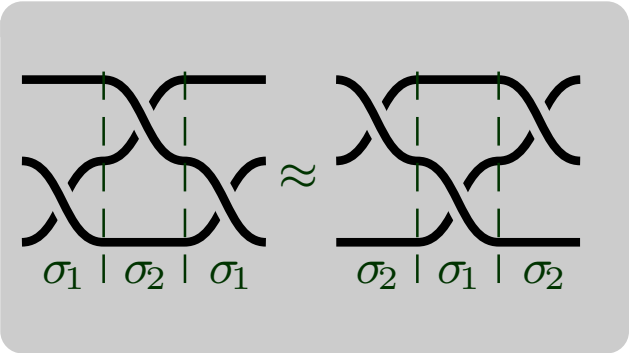
Présentation de B_n

- **Théorème** (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$





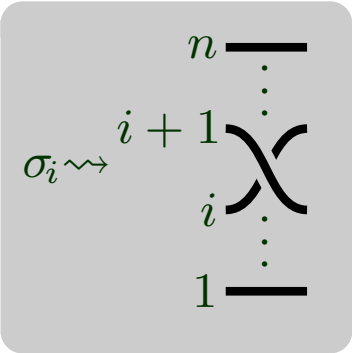


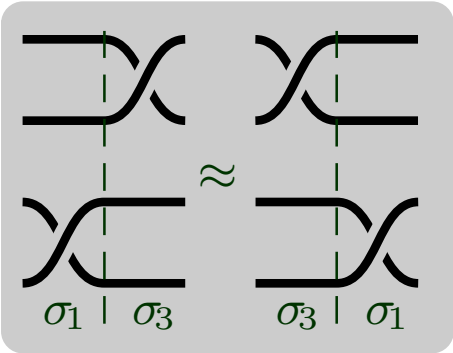
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalant pour les relations (1), *i.e.*, si $w \equiv w'$ est vérifiée.

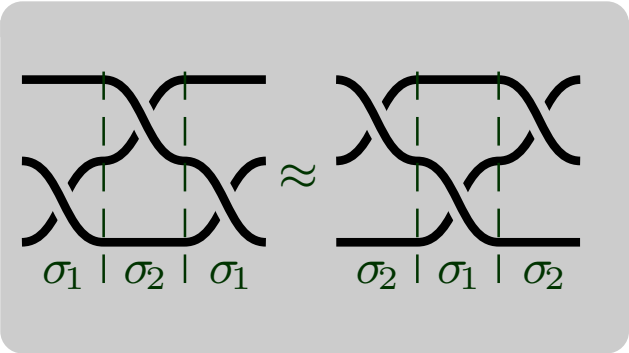
Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$





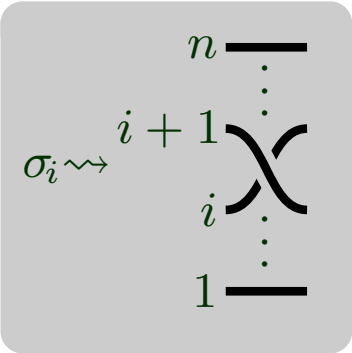


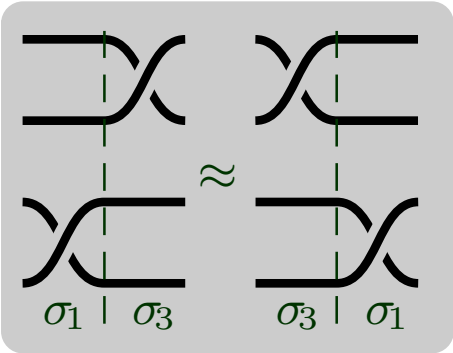
- Problème du mot : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalant pour les relations (1), *i.e.*, si $w \equiv w'$ est vérifiée.

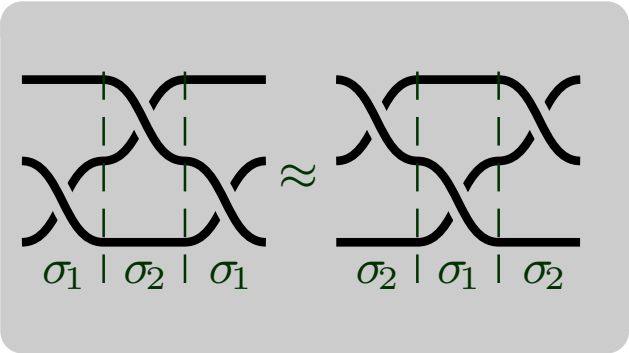
Présentation de B_n

- **Théorème** (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$





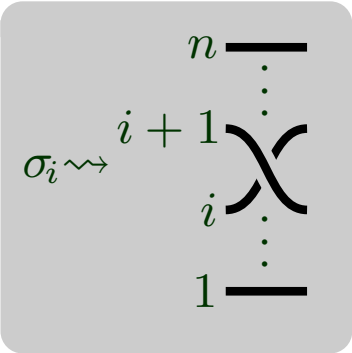


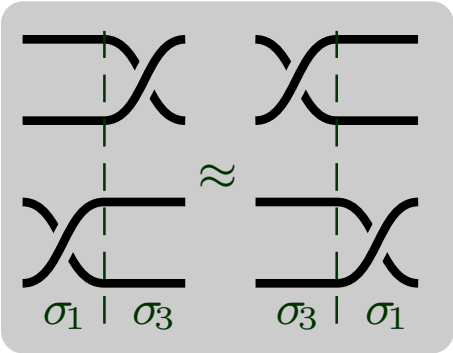
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalant pour les relations (1), *i.e.*, si $w \equiv w'$ est vérifiée.

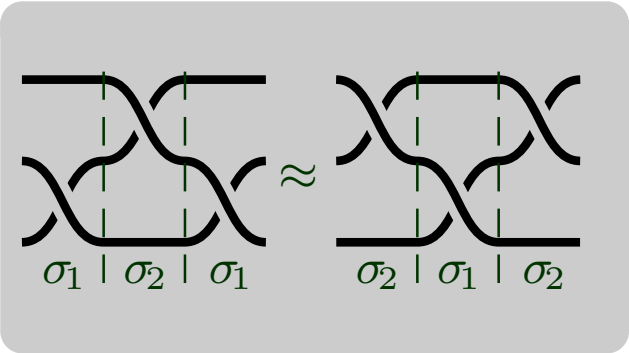
Présentation de B_n

- **Théorème** (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \qquad (1)$$







- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalant pour les relations (1), *i.e.*, si $w \equiv w'$ est vérifiée.

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué

Mots σ-définis

Mots de tresse σ-définis $=$ le σ_i de plus grand index n'apparaît que positivement ou négativement.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué

- Question : Quelle est la complexité de ces algorithmes ?

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué $\leqslant e^{\ell}$

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué $\leqslant e^{\ell}$

- Conjecture : Soit w un mot de tresses à n brins de longueur ℓ, alors il existe un mot σ-défini w' équivalent à w vérifiant

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué $\leqslant e^{\ell}$

- Conjecture : Soit w un mot de tresses à n brins de longueur ℓ, alors il existe un mot σ-défini w' équivalent à w vérifiant $|w'| \leqslant C_n \cdot \ell$,

- Question : Soit w un mot de tresse de longueur ℓ,
quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Laver' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué $\leqslant e^{\ell}$

- Conjecture : Soit w un mot de tresses à n brins de longueur ℓ, alors il existe un mot σ-défini w' équivalent à w vérifiant $|w'| \leqslant C_n \cdot \ell$,
où C_n ne dépendant que de n.

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i,

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1}

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1},

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif ou bien σ-négatif

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif ou bien σ-négatif ou bien triviale.

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif ou bien σ-négatif ou bien triviale.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\, \sigma_1\, \sigma_2^{-1}$

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif ou bien σ-négatif ou bien triviale.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\, \sigma_1\, \sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif,

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif ou bien σ-négatif ou bien triviale.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\, \sigma_1\, \sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif ou bien σ-négatif ou bien triviale.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\, \sigma_1\, \sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif.

Mot σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresse est σ-défini s'il est σ-positif ou bien σ-négatif ou bien triviale.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif. Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

- Intérêt des mots σ-définis :
  - solution au problème su mot,
  - ordre des tresses, *i.e.*, $\beta < \beta'$ si $\beta^{-1}\beta'$ a un représentant σ-positifs.

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Outils utilisés :

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Outils utilisés :

- Monoïde de tresses dual B_n^{+*}.

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Outils utilisés :

- Monoïde de tresses dual B_n^{+*}.
- Forme normale de Garside sur B_n^{+*}.

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Outils utilisés :

- Monoïde de tresses dual B_n^{+*}.
- Forme normale de Garside sur B_n^{+*}.
- Forme normale tournante sur B_n^{+*}.

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Outils utilisés :

- Monoïde de tresses dual B_n^{+*}.
- Forme normale de Garside sur B_n^{+*}.
- Forme normale tournante sur B_n^{+*}.
- Propriétés de la forme normale tournante.

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Outils utilisés :

- Monoïde de tresses dual B_n^{+*}.
- Forme normale de Garside sur B_n^{+*}.
- Forme normale tournante sur B_n^{+*}.
- Propriétés de la forme normale tournante.

• Question : Pourquoi utiliser le monoïde de tresse dual ?

Preuve de la conjecture

• Théorème : Tout mot de tresses à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Outils utilisés :

- Monoïde de tresses dual B_n^{+*}.
- Forme normale de Garside sur B_n^{+*}.
- Forme normale tournante sur B_n^{+*}.
- Propriétés de la forme normale tournante.

• Question : Pourquoi utiliser le monoïde de tresse dual ?

Bonne description de la restriction de $<$ sur B_n^{+*}.

$\rightsquigarrow$ Calcul explicite de mots σ-définis.

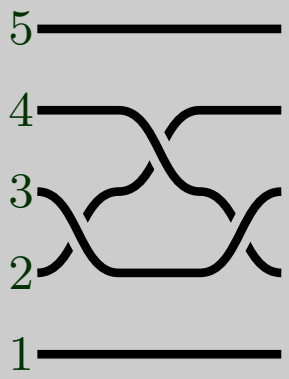
Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

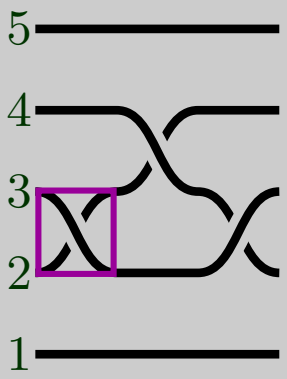
$a_{2,4} \rightsquigarrow$



Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

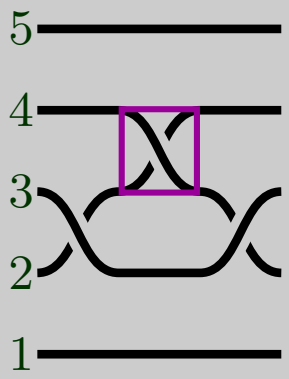
$a_{2,4} \rightsquigarrow$



Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

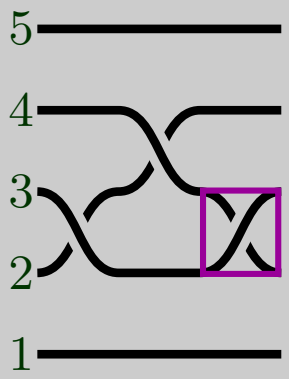
$a_{2,4} \rightsquigarrow$



Les tresses $a_{p,q}$

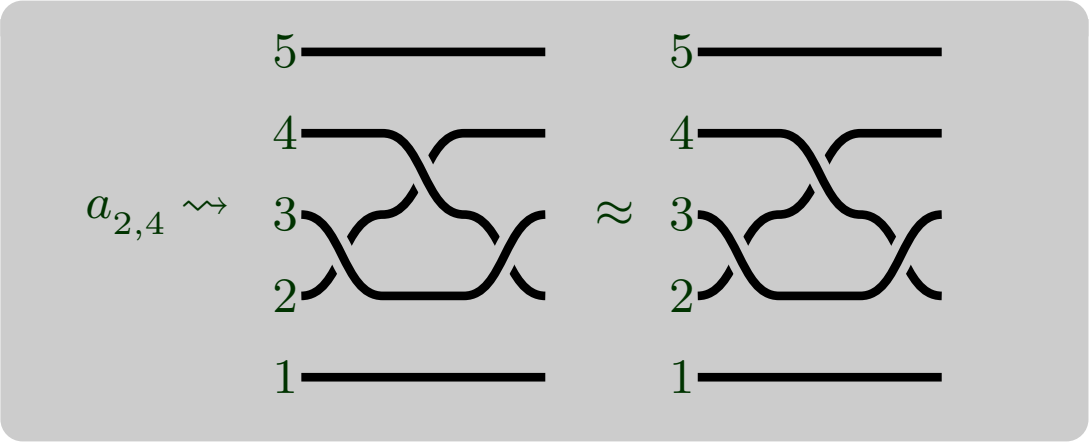
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

$a_{2,4} \rightsquigarrow$



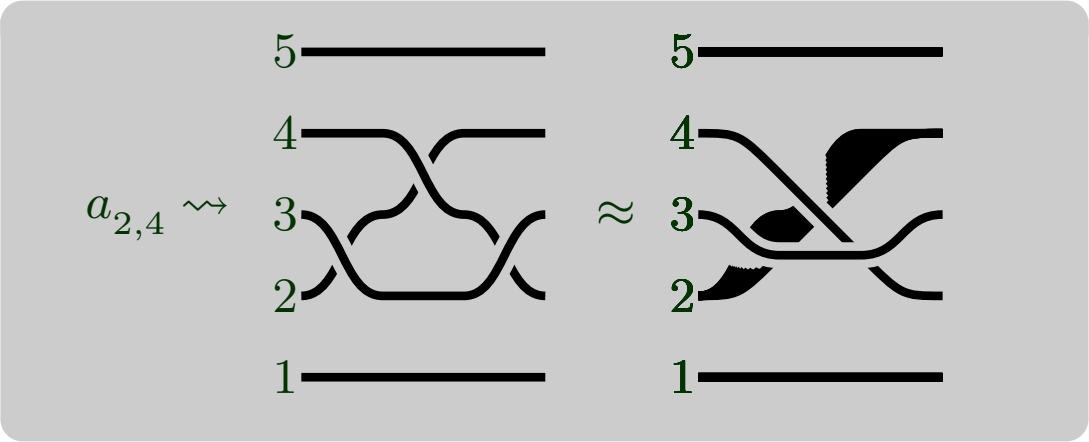
Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.



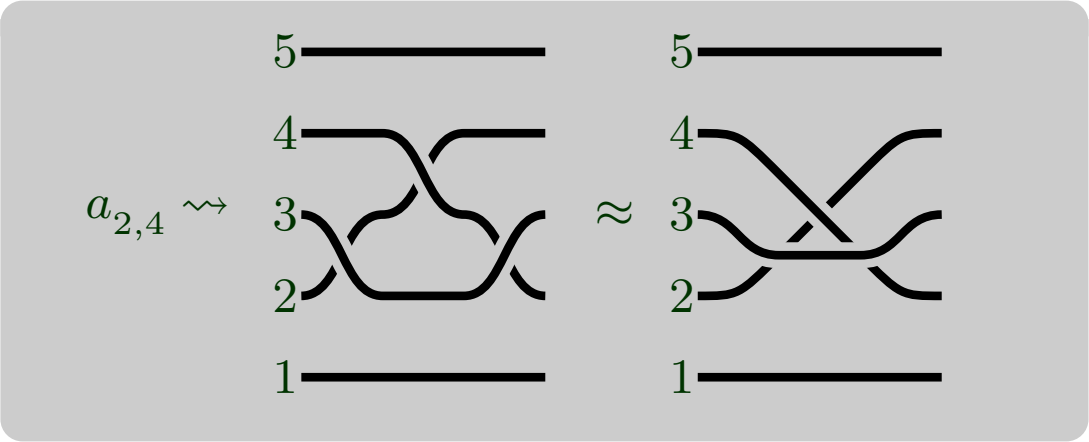
Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.



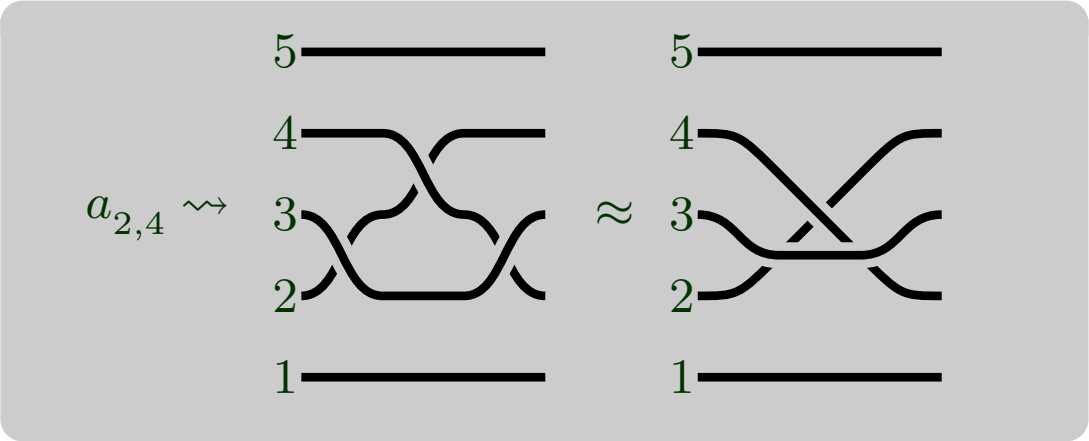
Les tresses $a_{p,q}$

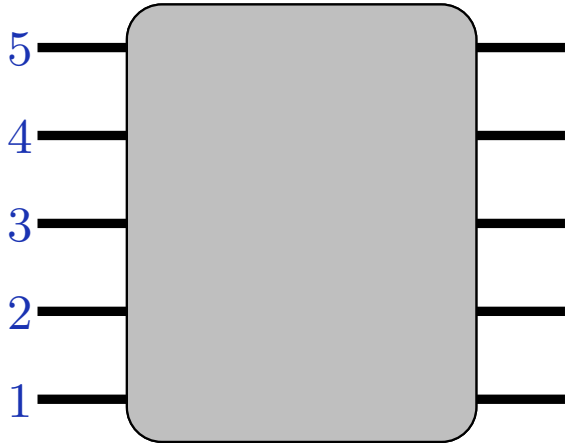
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.



Les tresses $a_{p,q}$

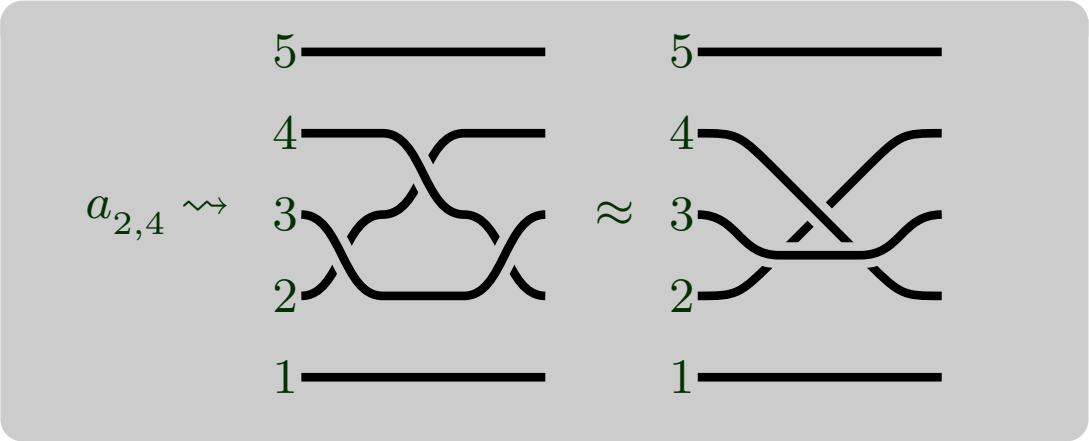
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

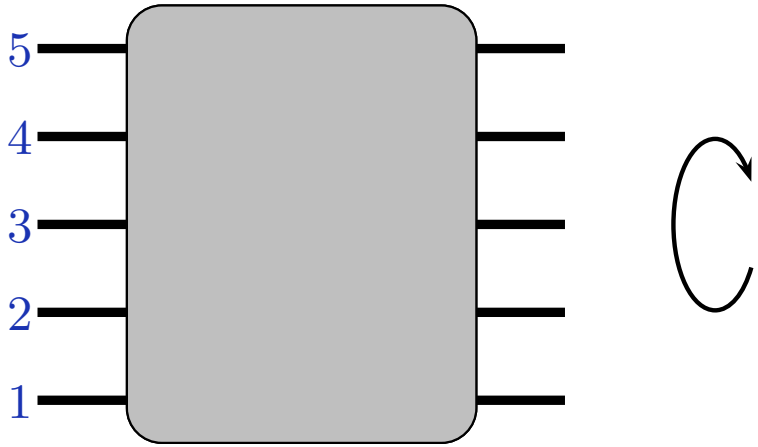




Les tresses $a_{p,q}$

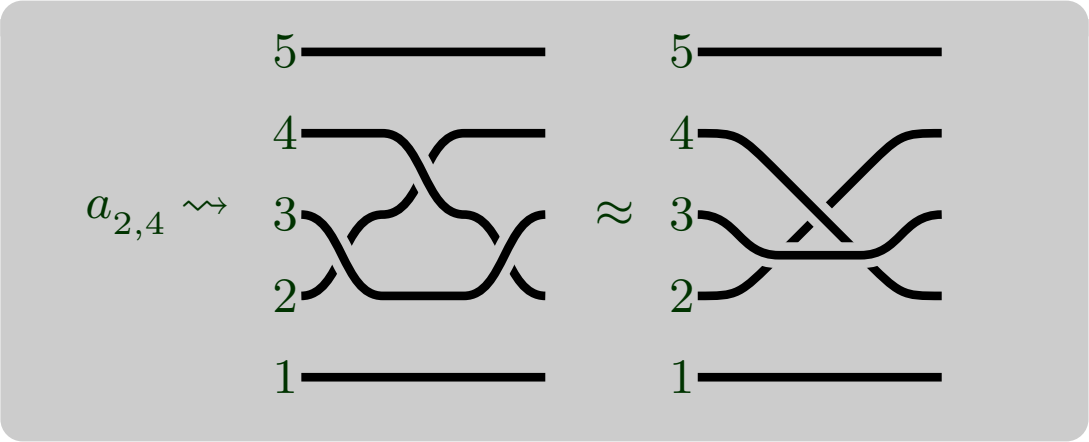
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

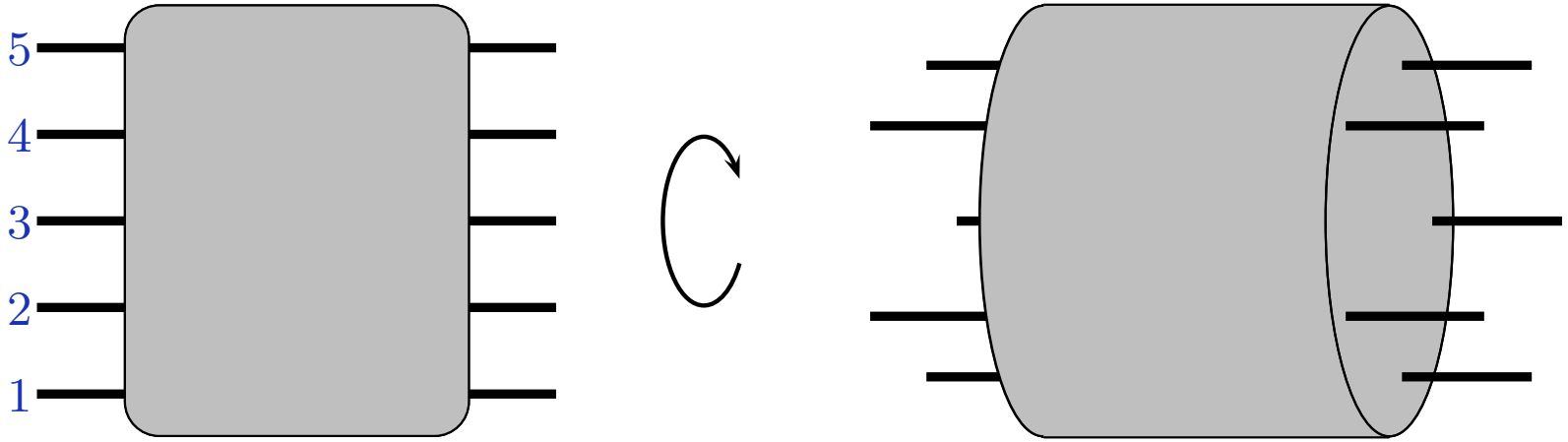




Les tresses $a_{p,q}$

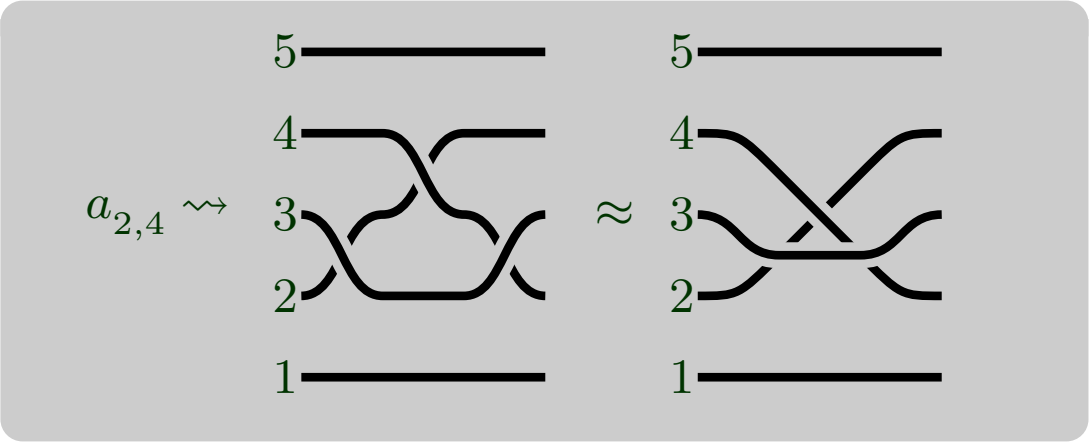
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

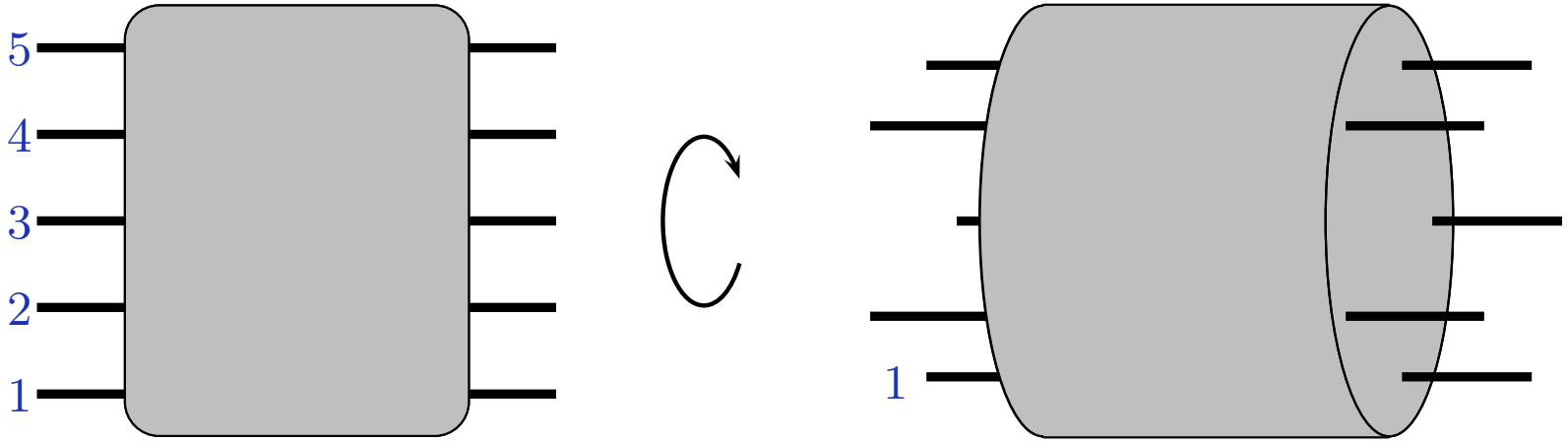




Les tresses $a_{p,q}$

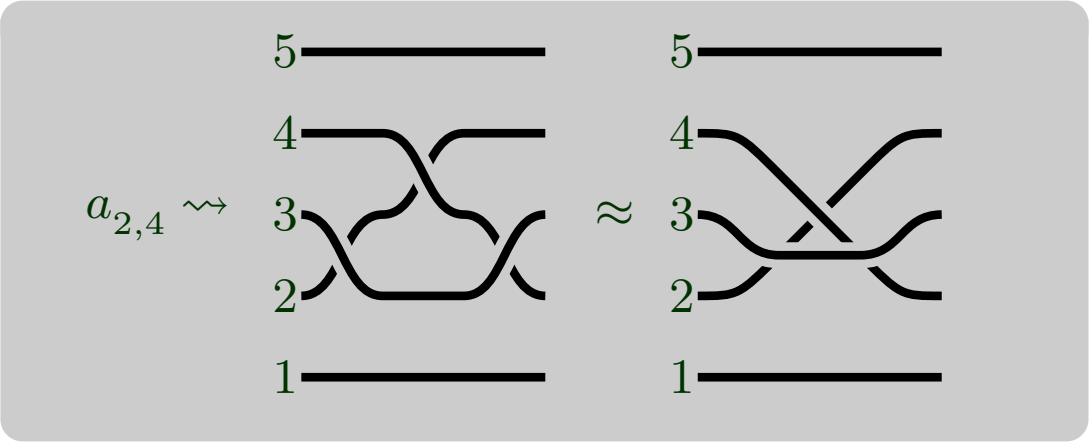
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

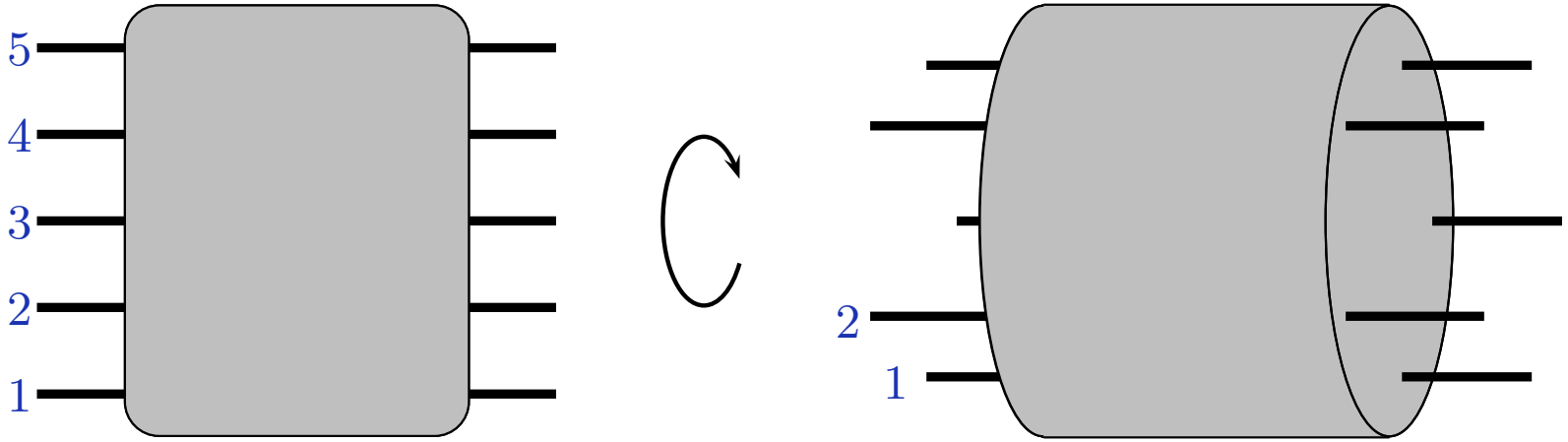




Les tresses $a_{p,q}$

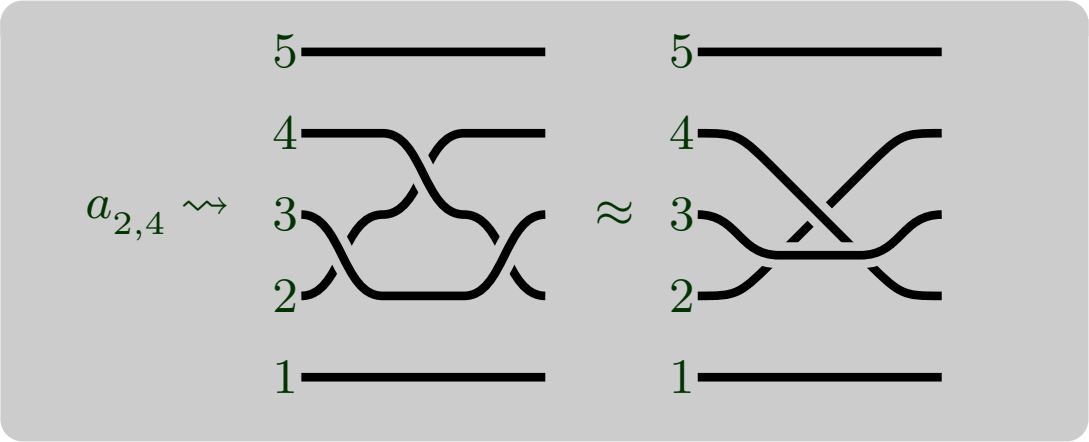
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

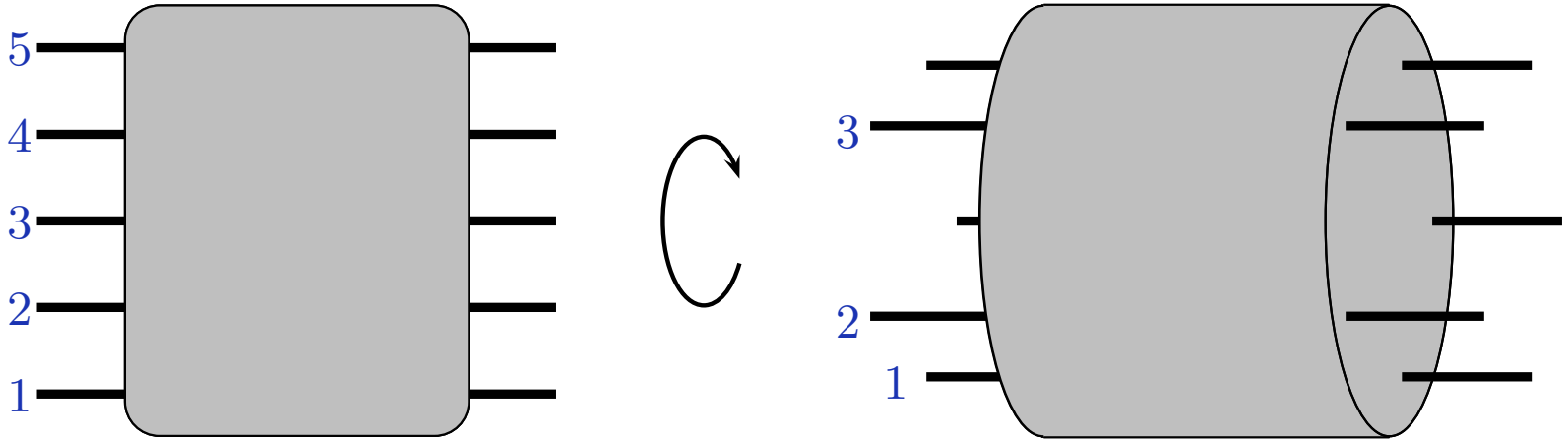




Les tresses $a_{p,q}$

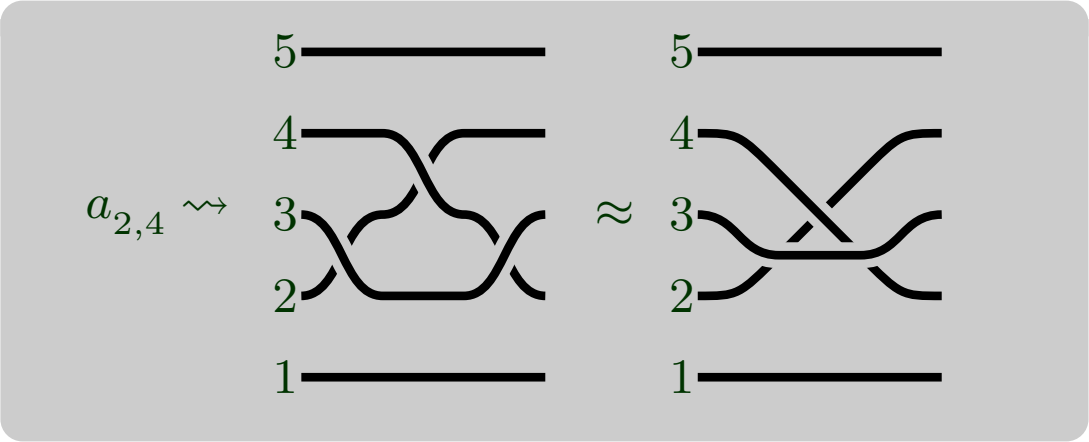
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

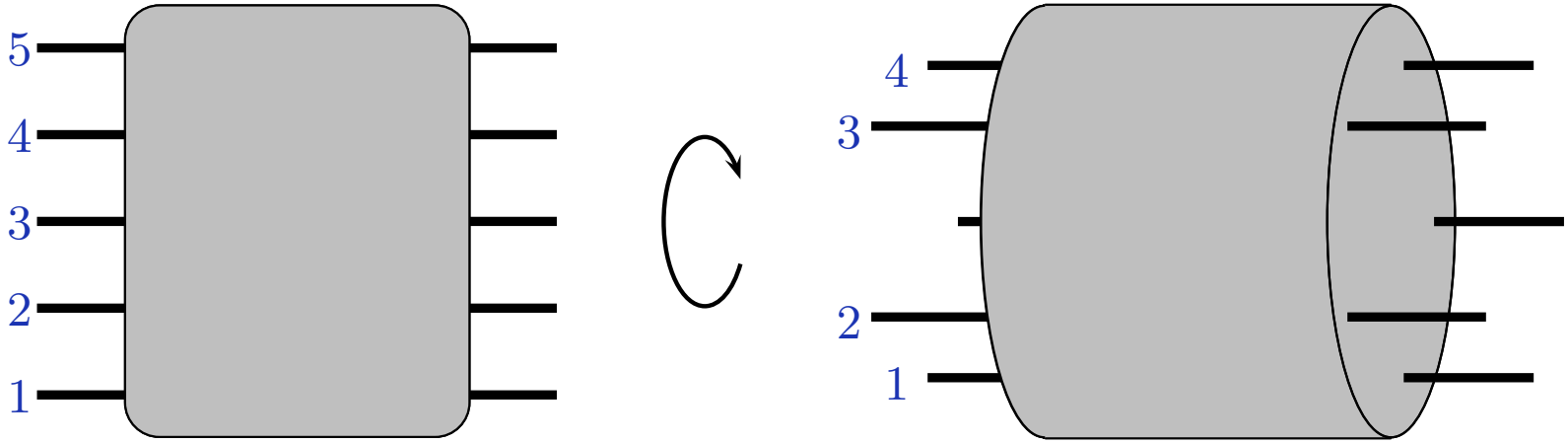




Les tresses $a_{p,q}$

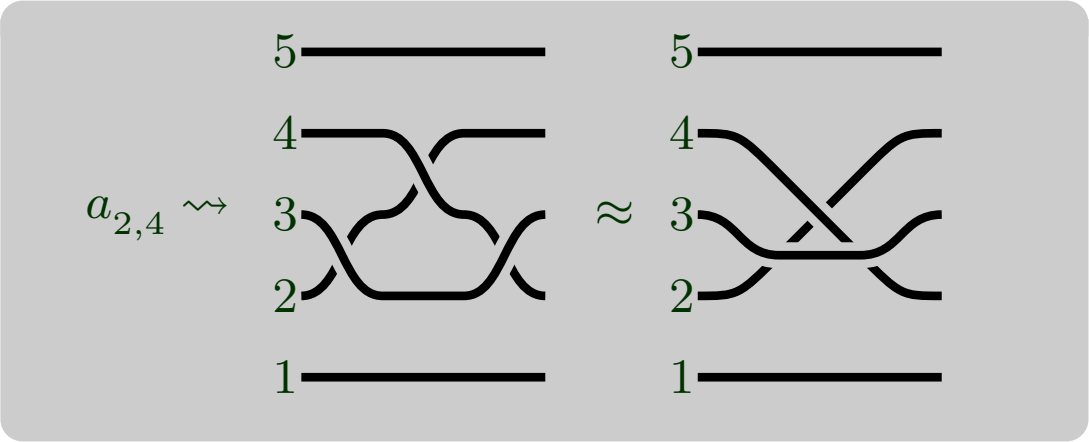
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

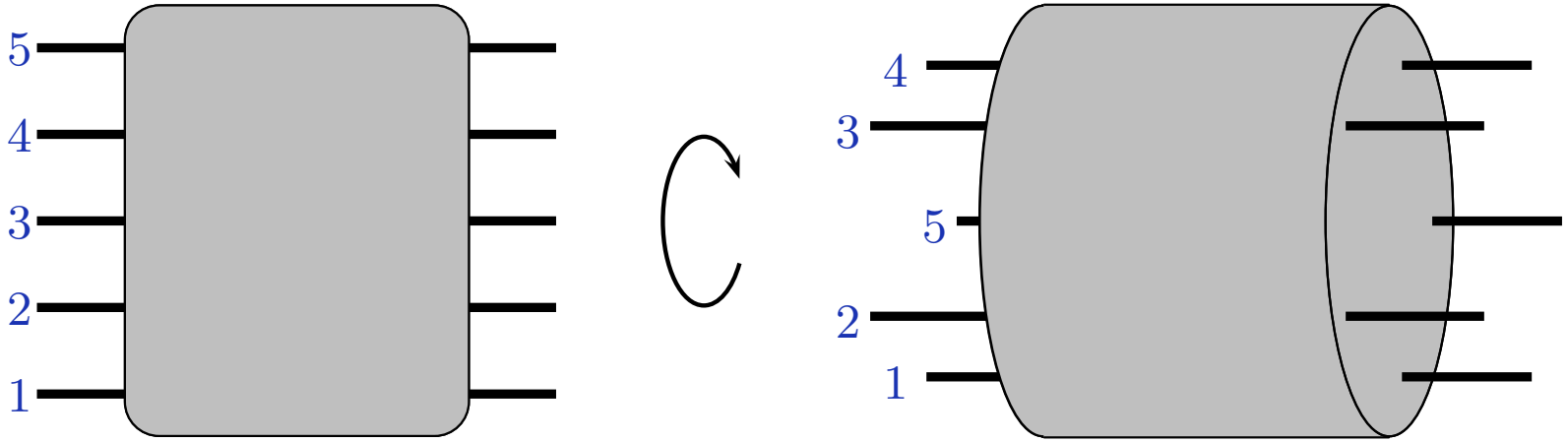




Les tresses $a_{p,q}$

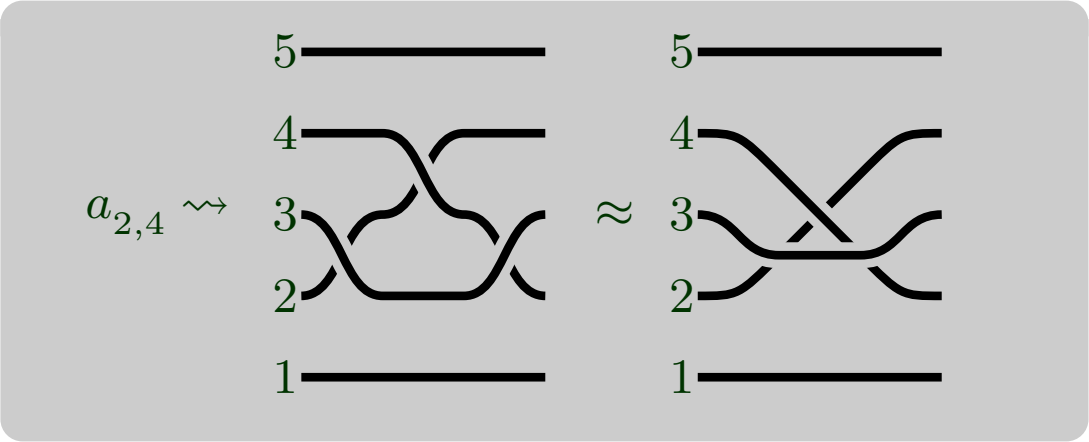
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

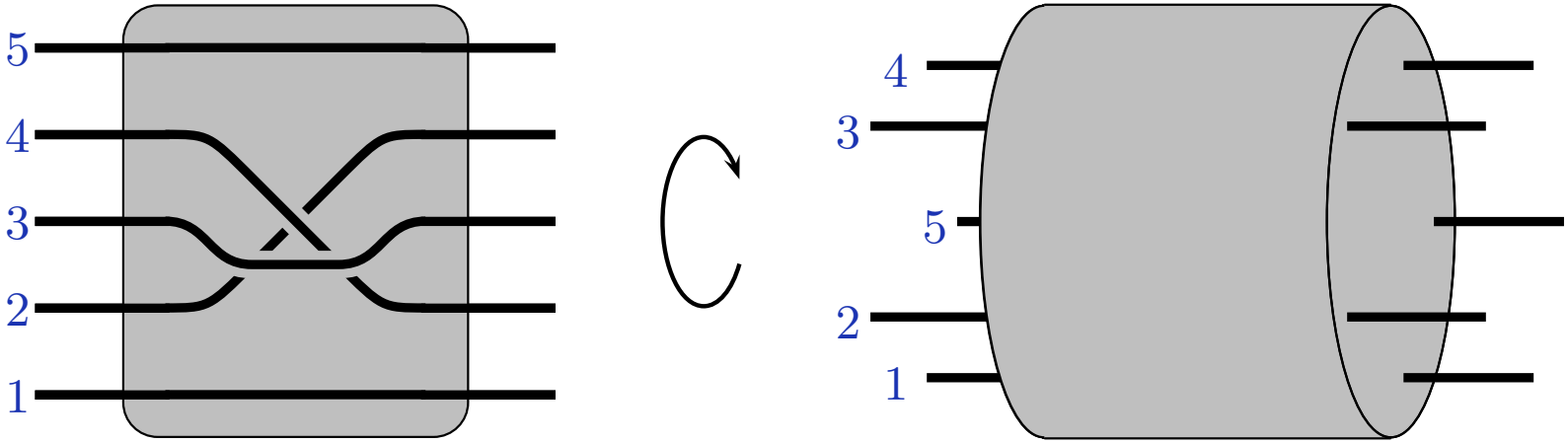




Les tresses $a_{p,q}$

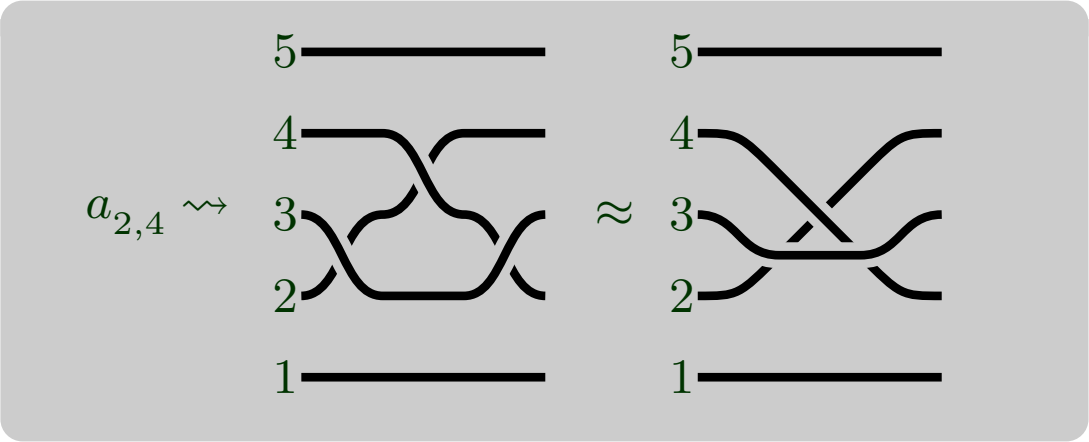
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

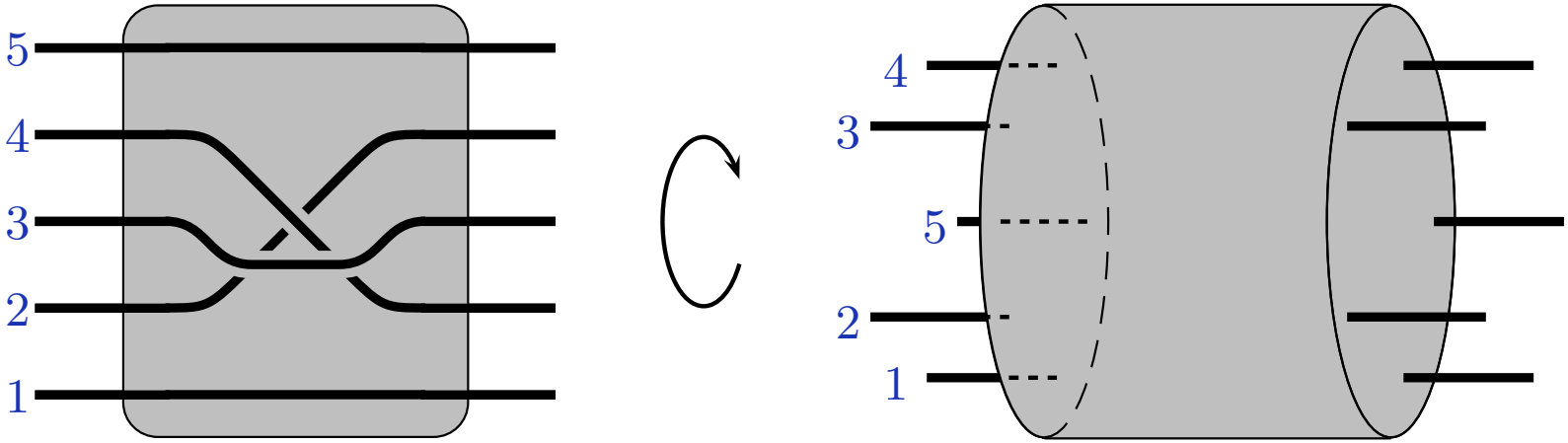




Les tresses $a_{p,q}$

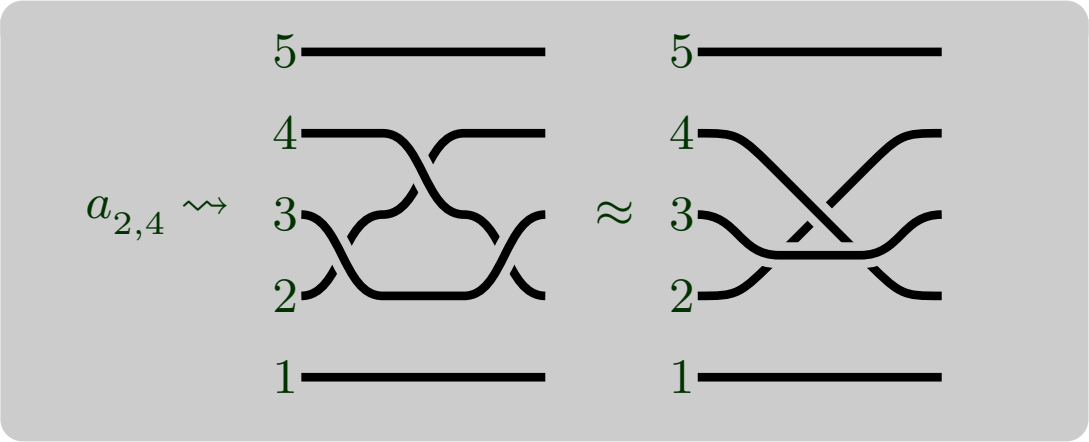
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

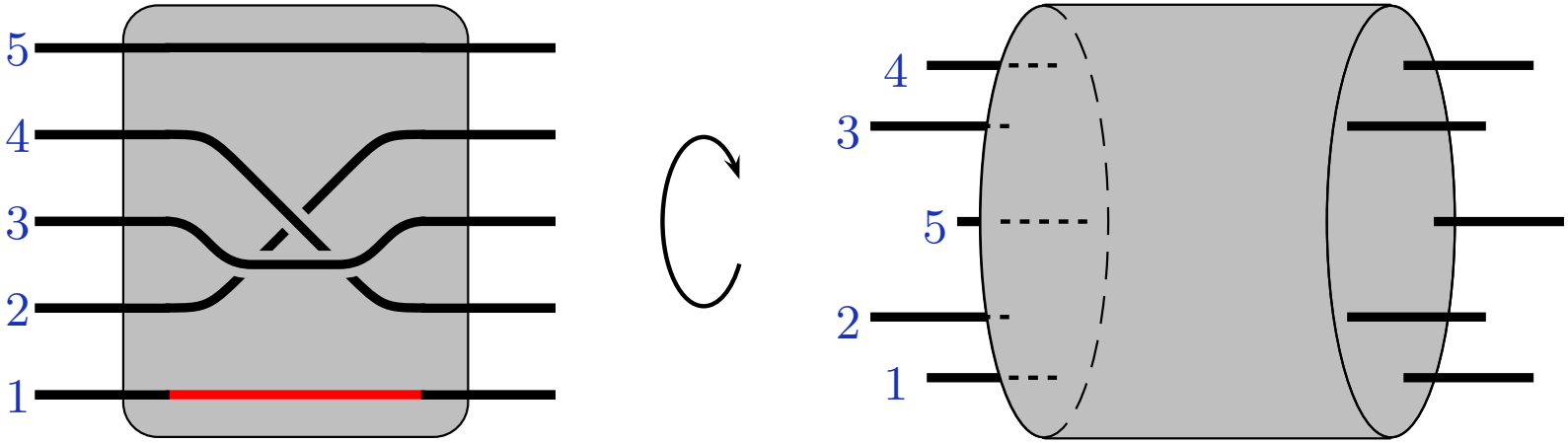




Les tresses $a_{p,q}$

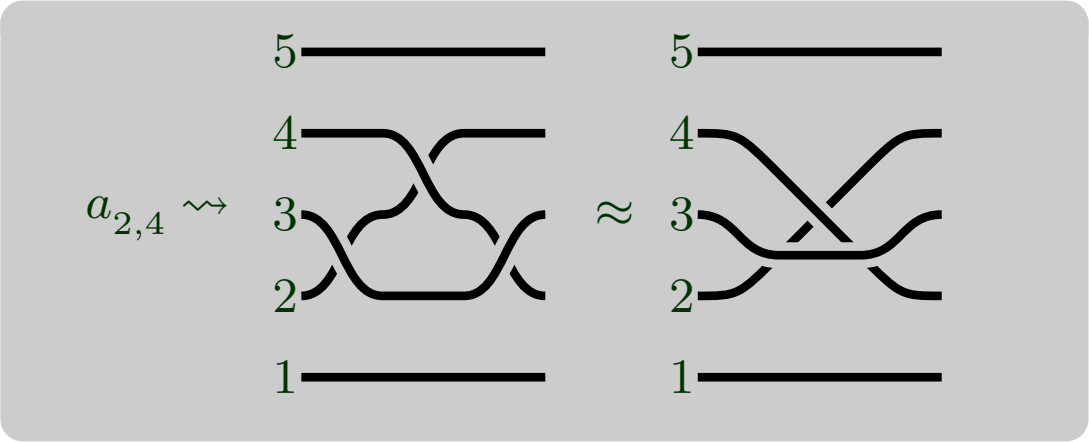
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

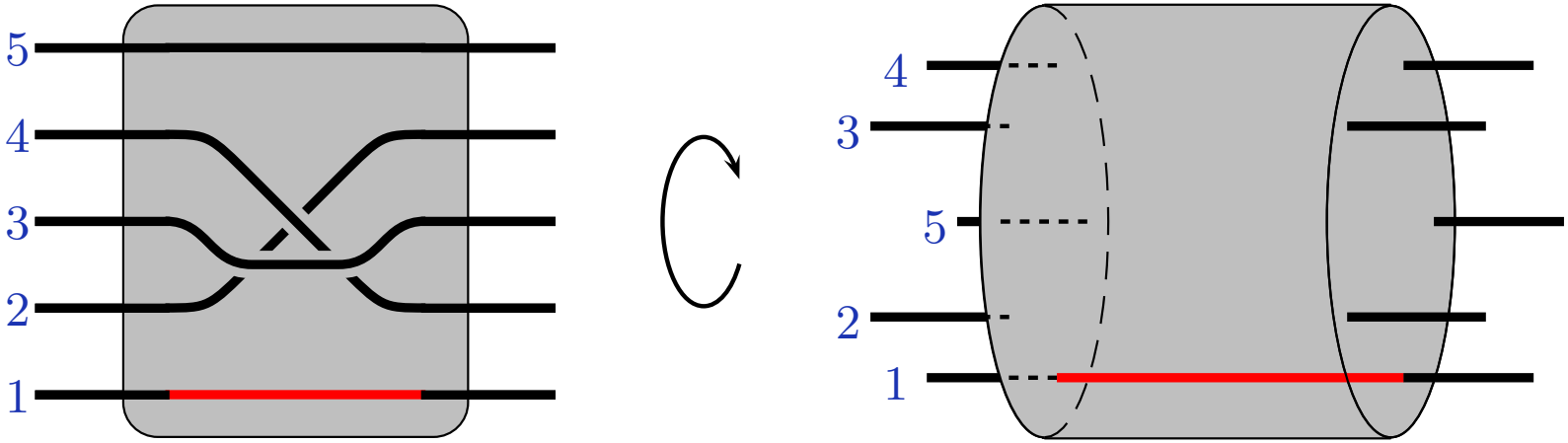




Les tresses $a_{p,q}$

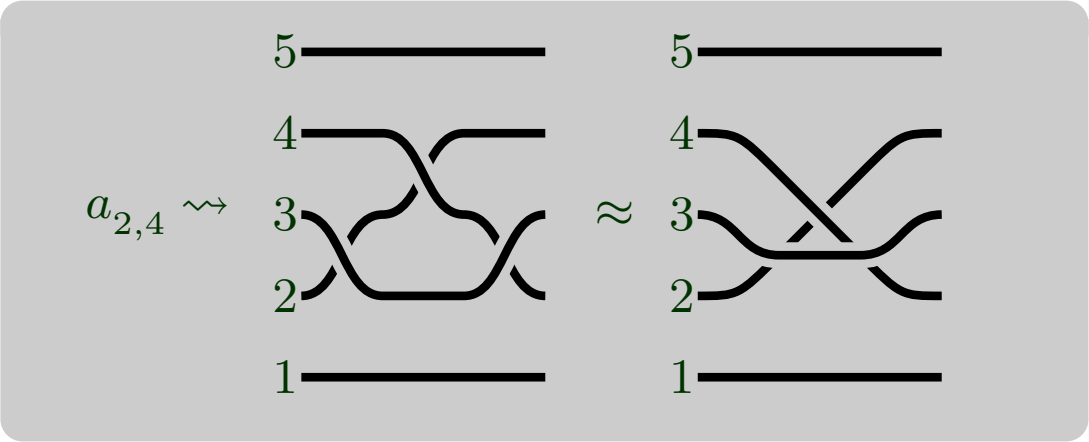
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

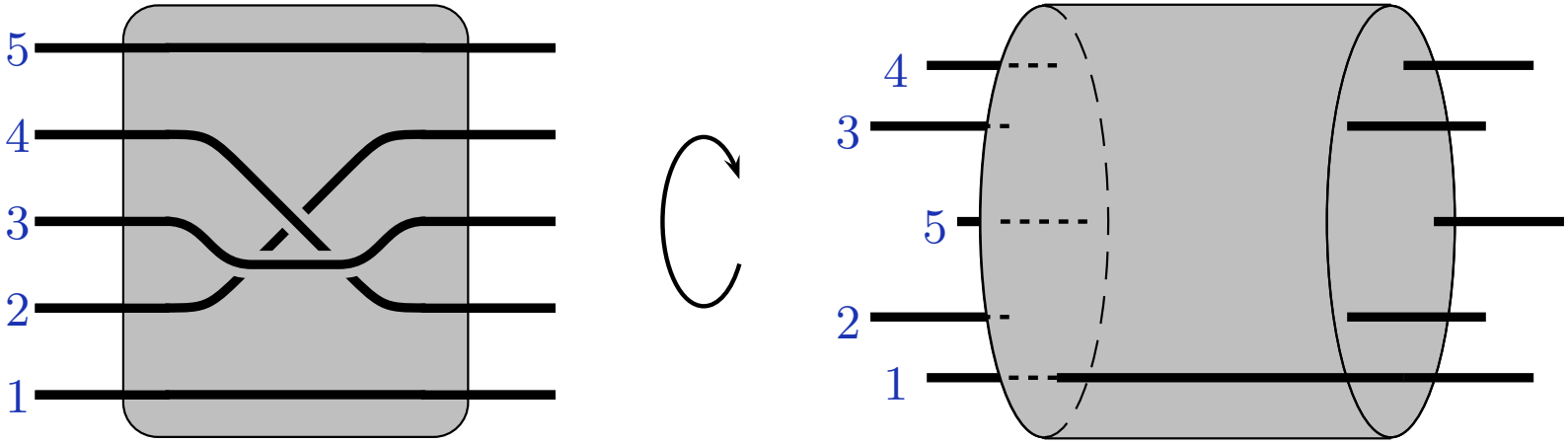




Les tresses $a_{p,q}$

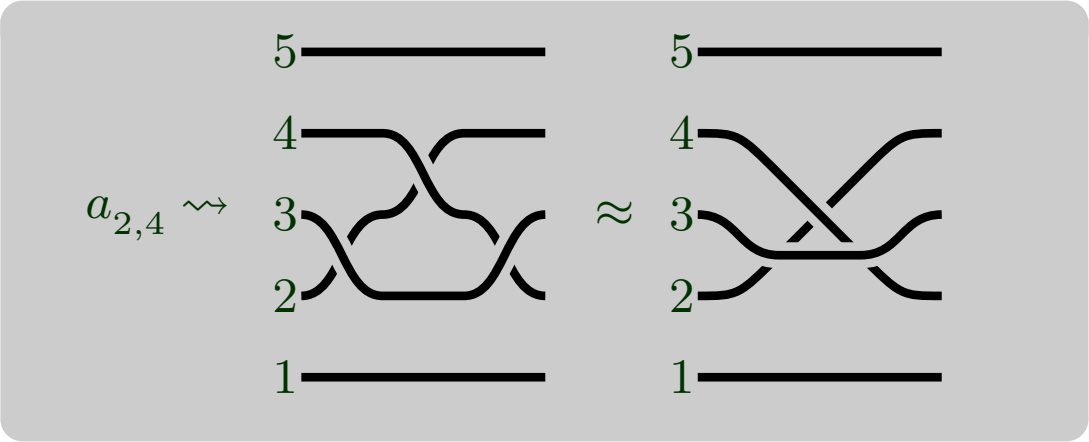
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

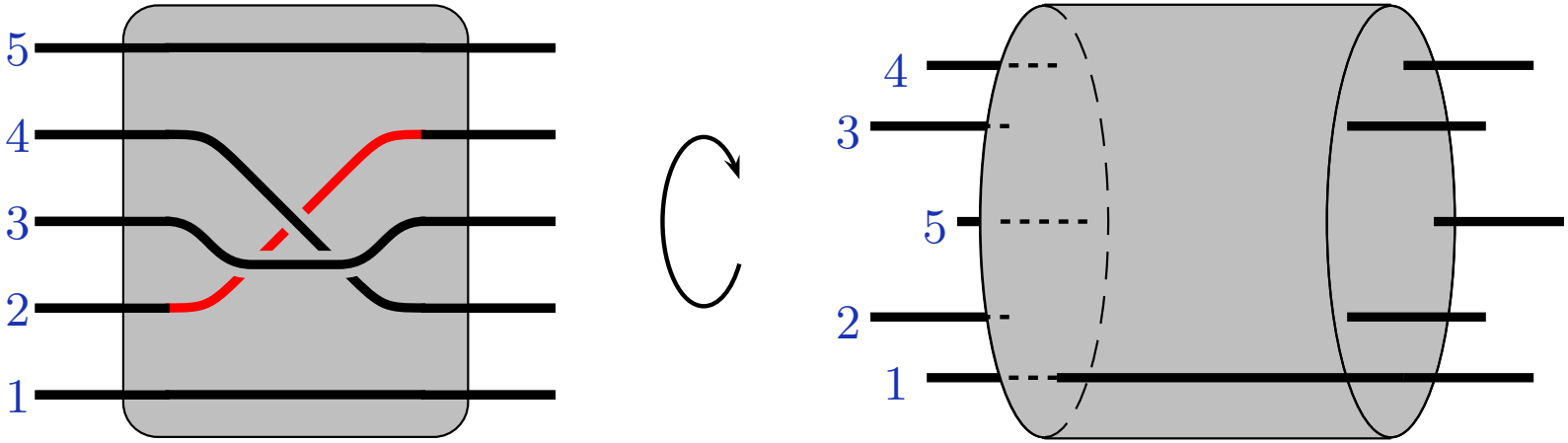




Les tresses $a_{p,q}$

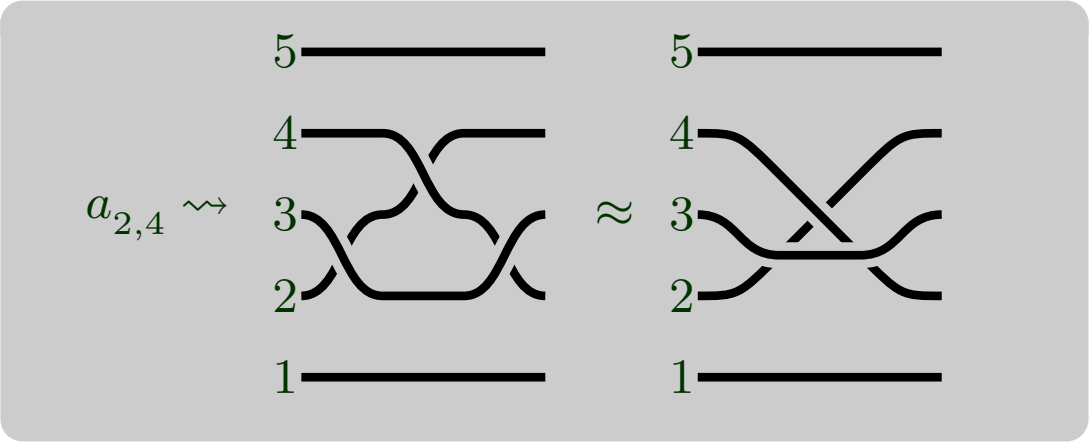
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

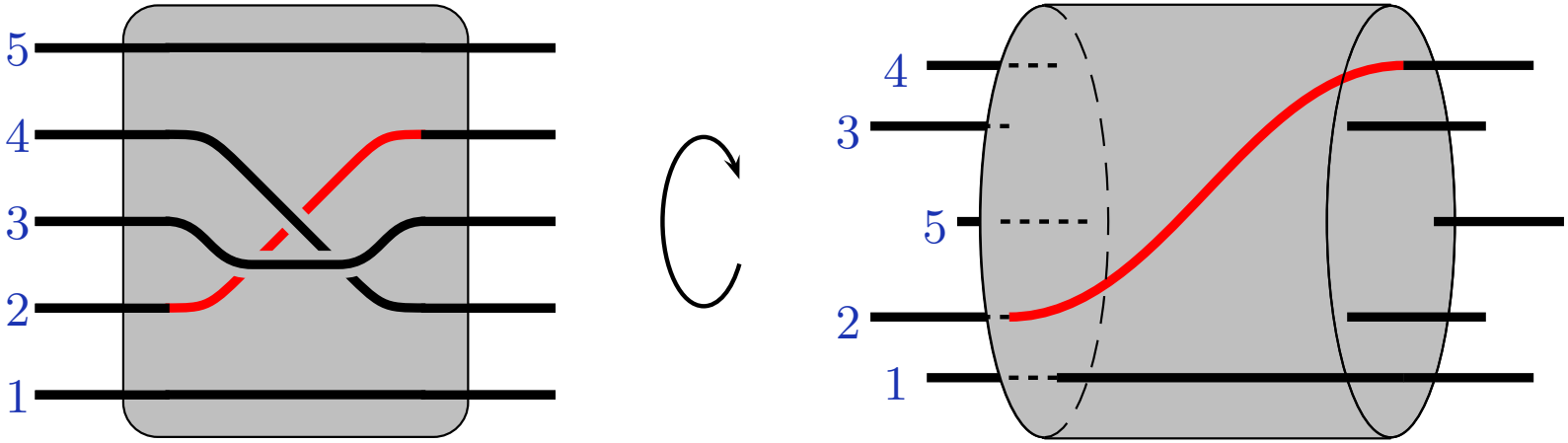




Les tresses $a_{p,q}$

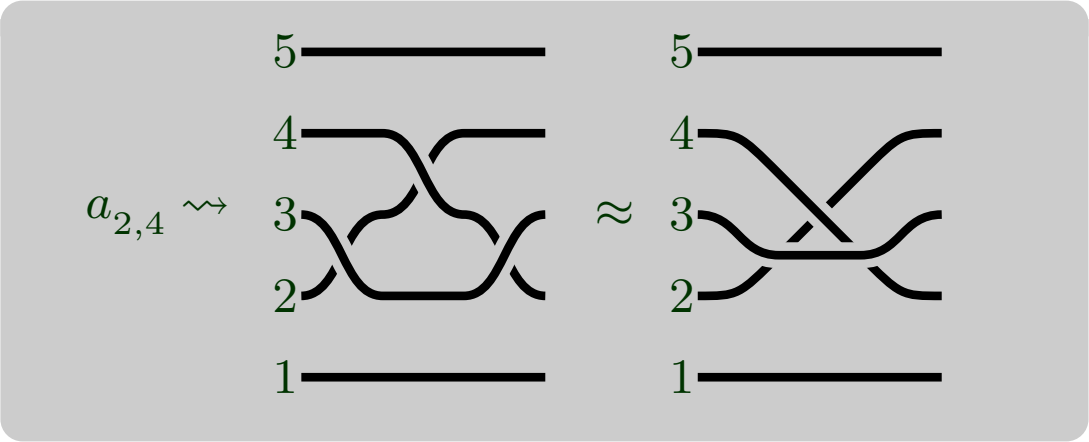
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

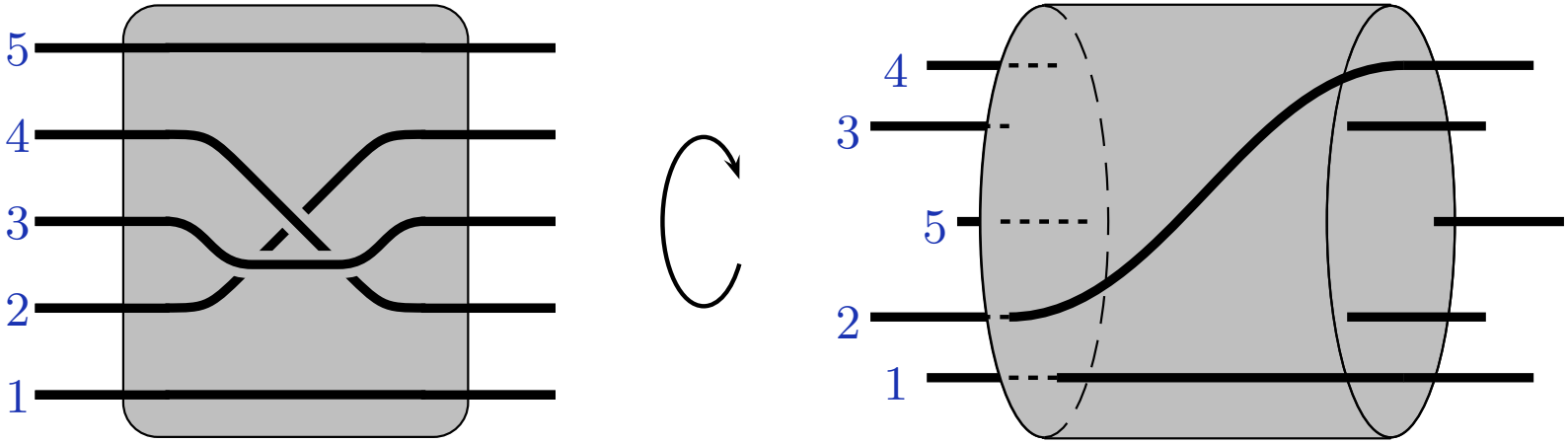




Les tresses $a_{p,q}$

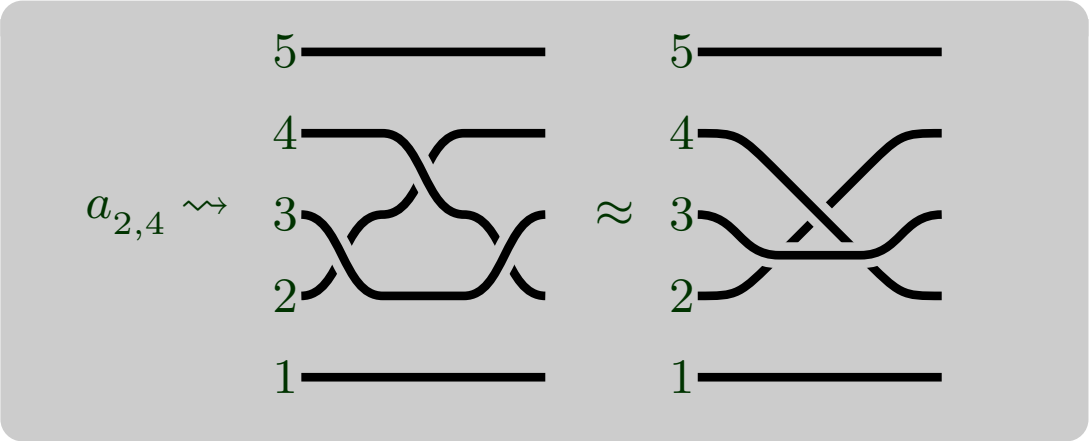
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

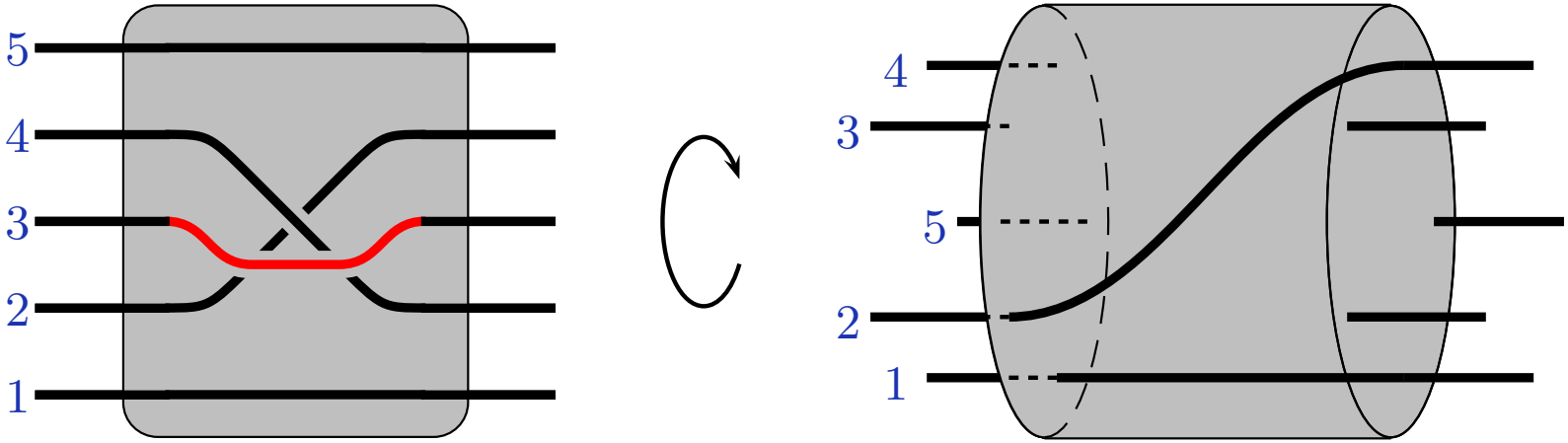




Les tresses $a_{p,q}$

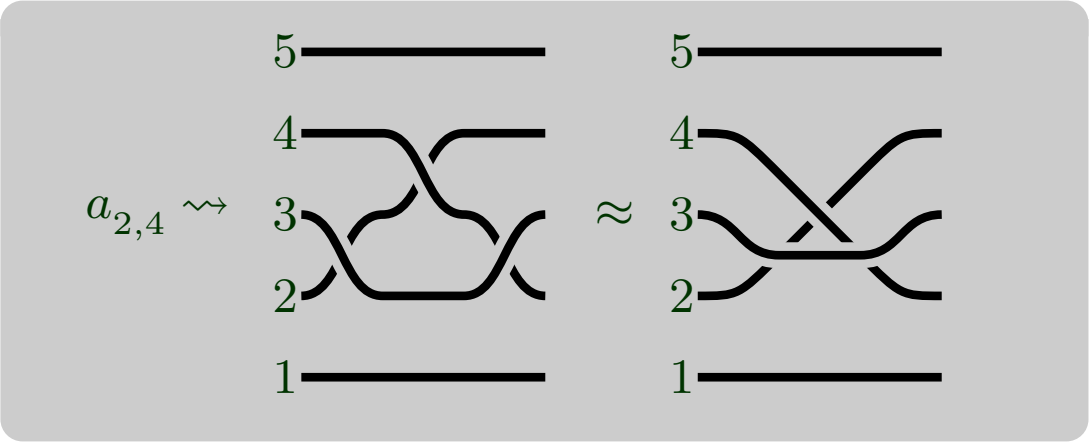
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

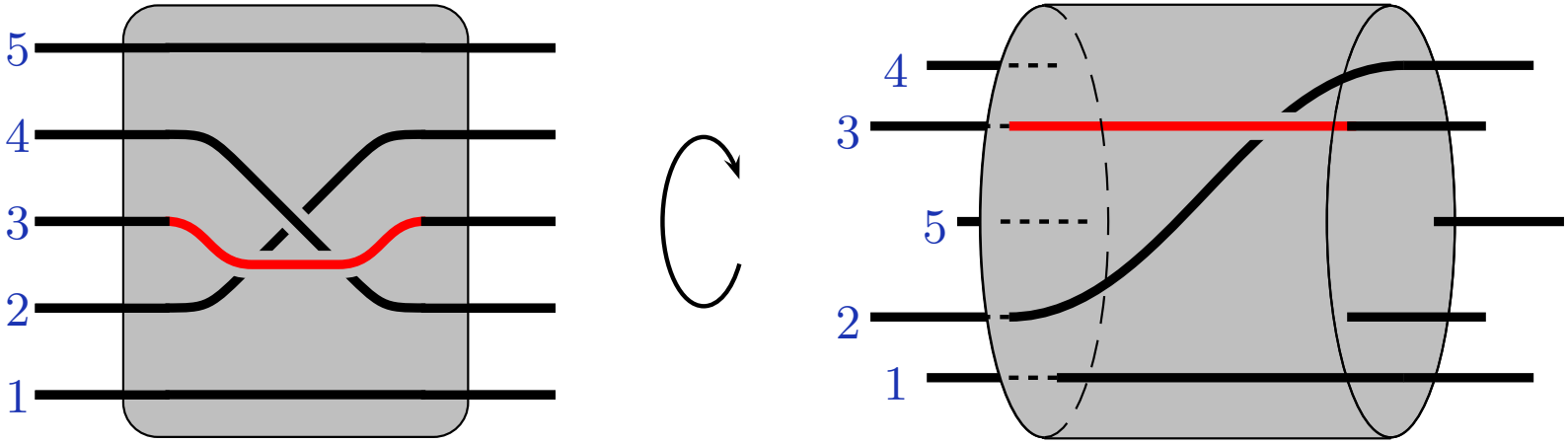




Les tresses $a_{p,q}$

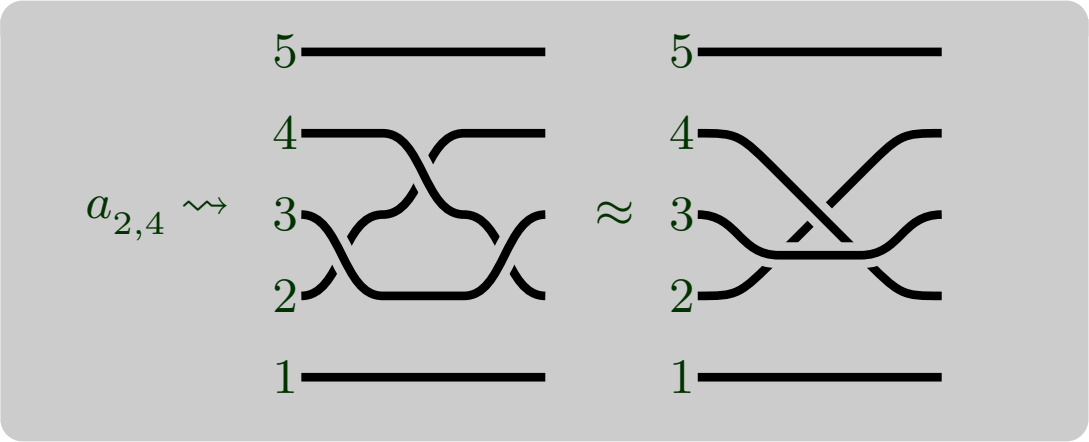
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

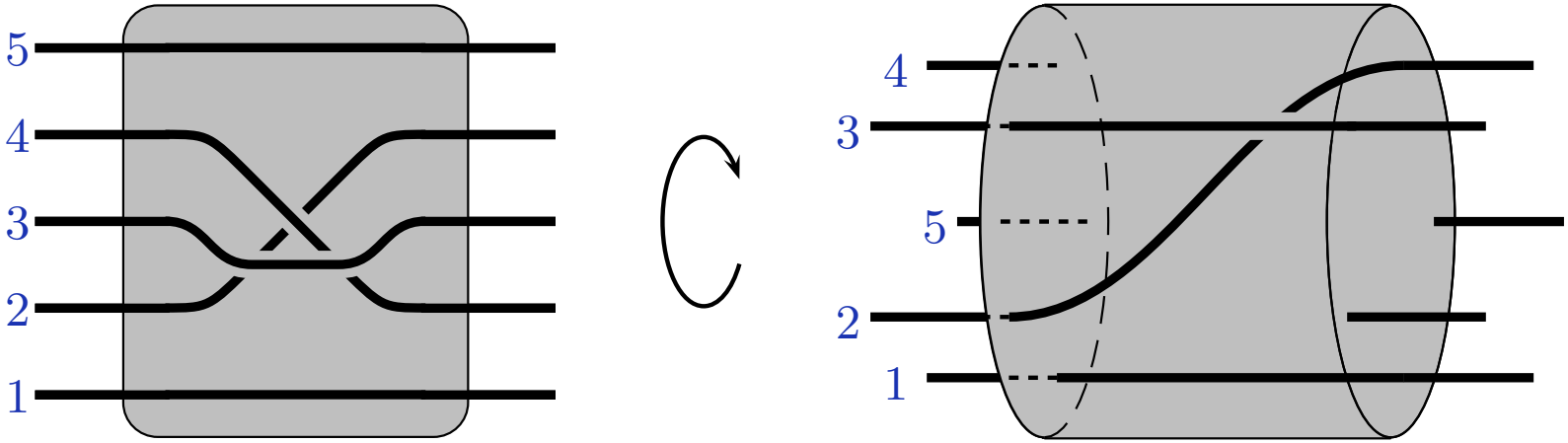




Les tresses $a_{p,q}$

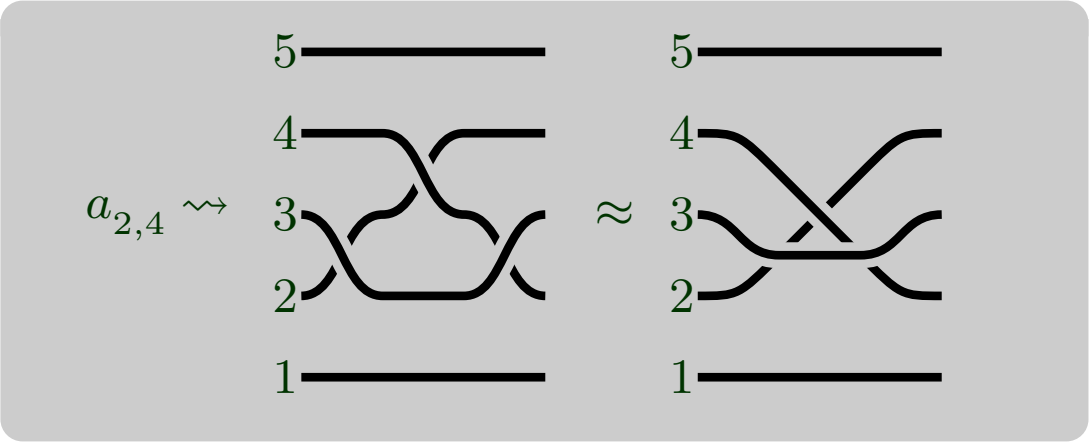
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

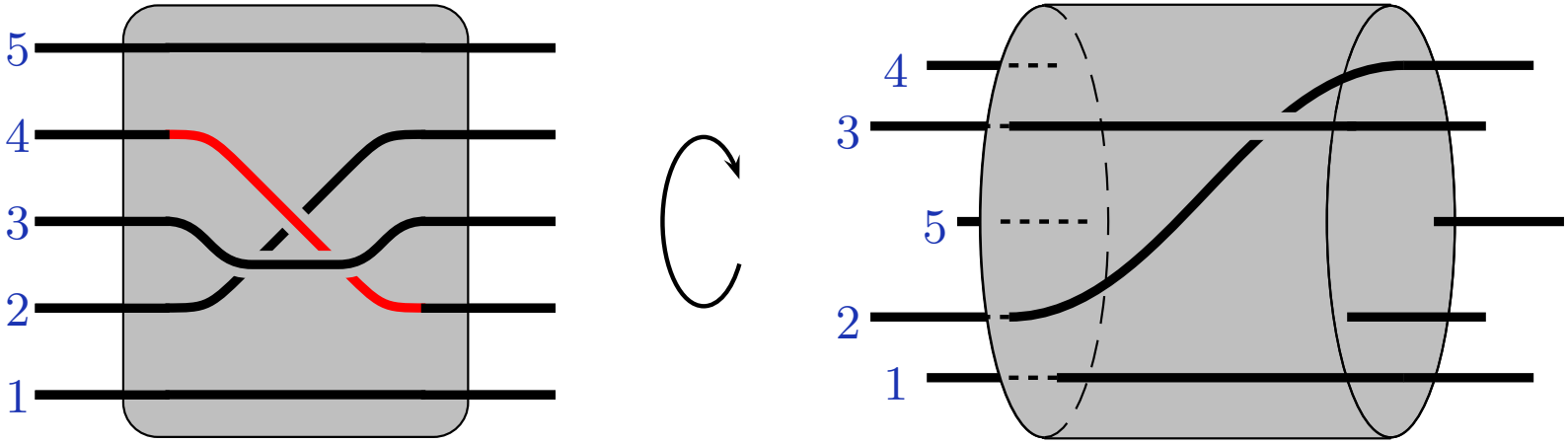




Les tresses $a_{p,q}$

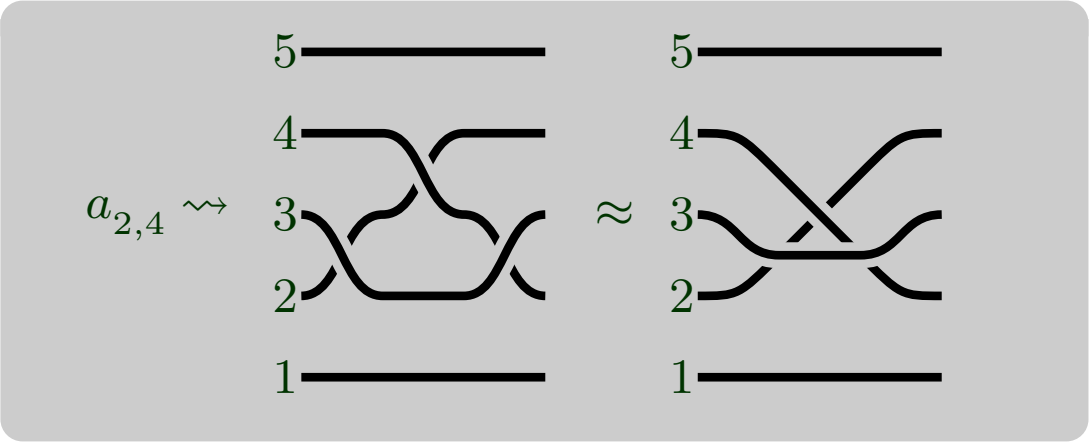
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

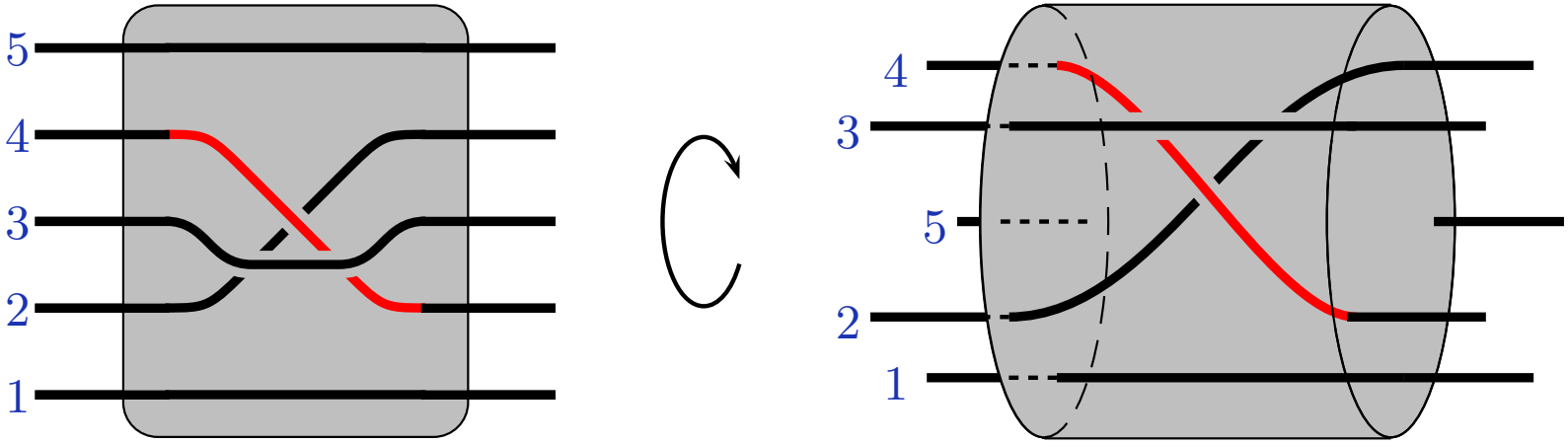




Les tresses $a_{p,q}$

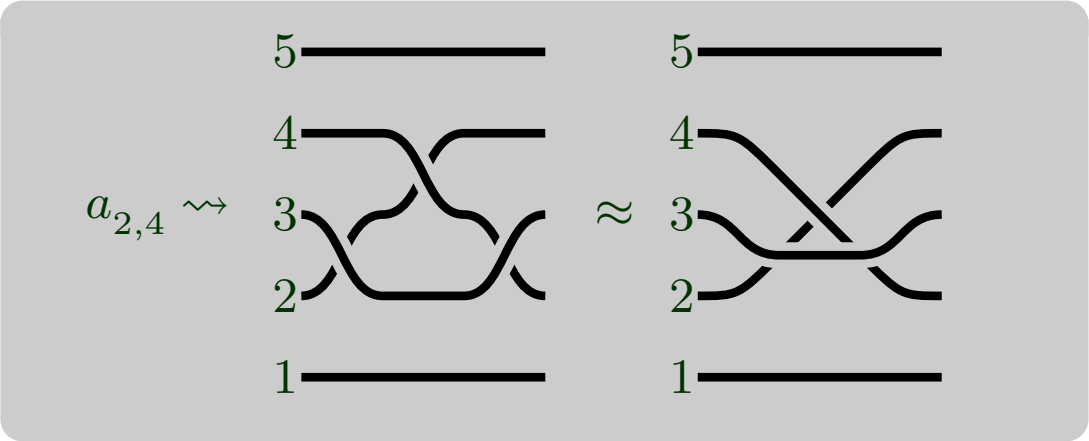
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

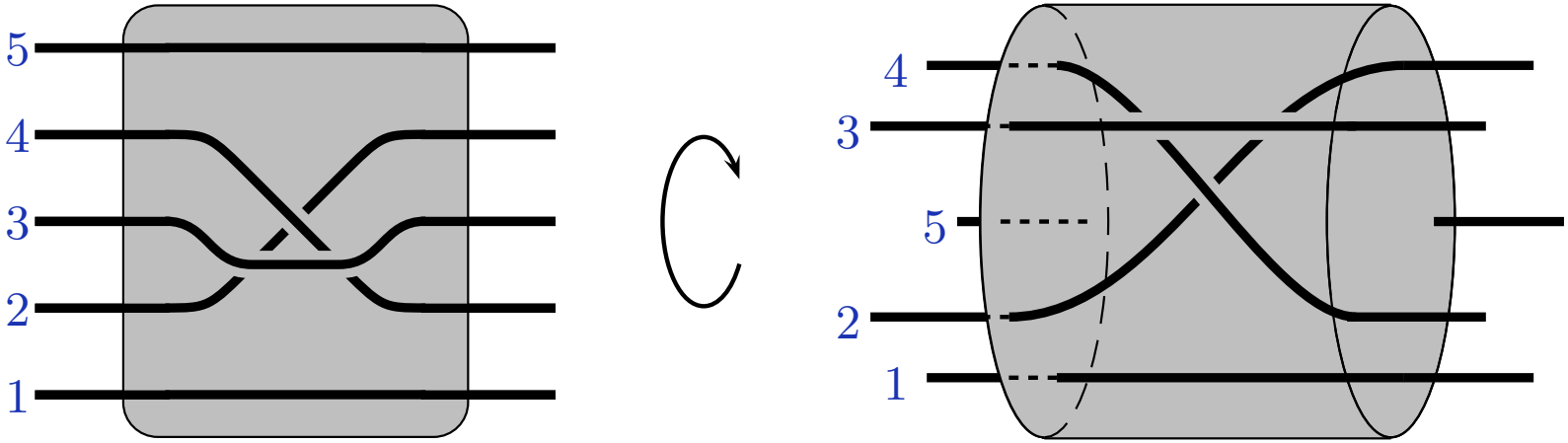




Les tresses $a_{p,q}$

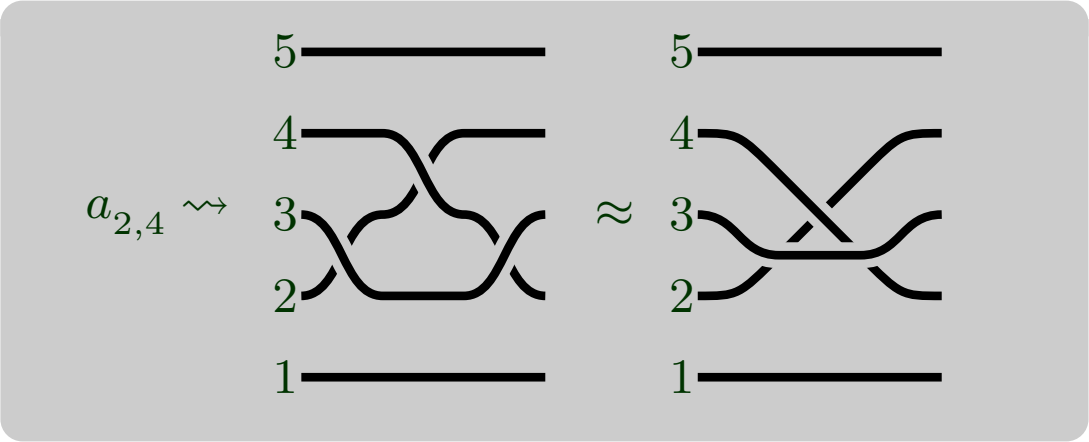
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

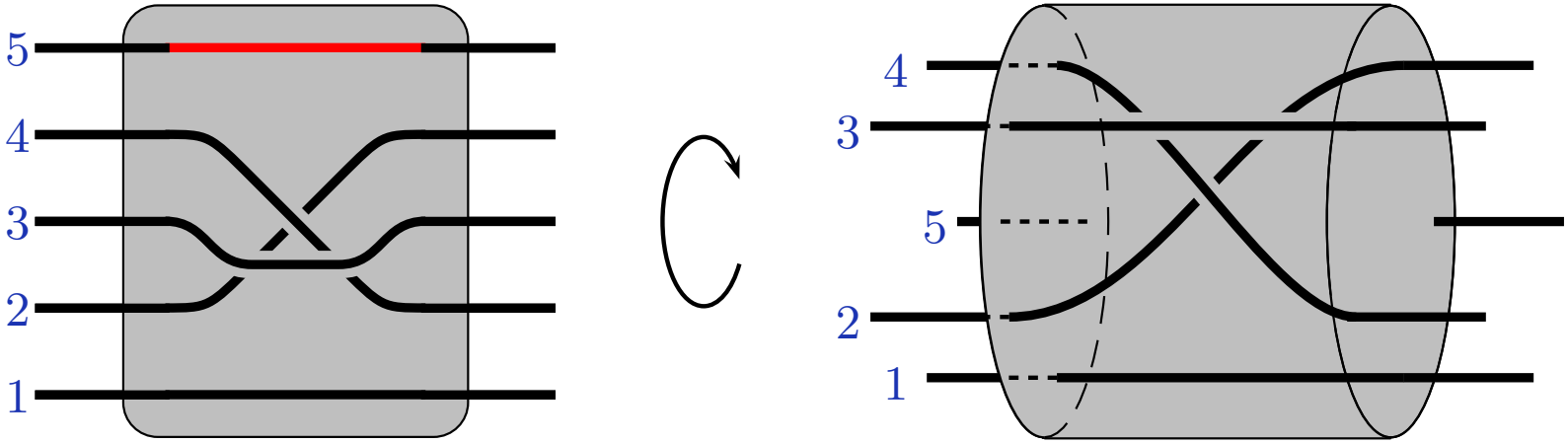




Les tresses $a_{p,q}$

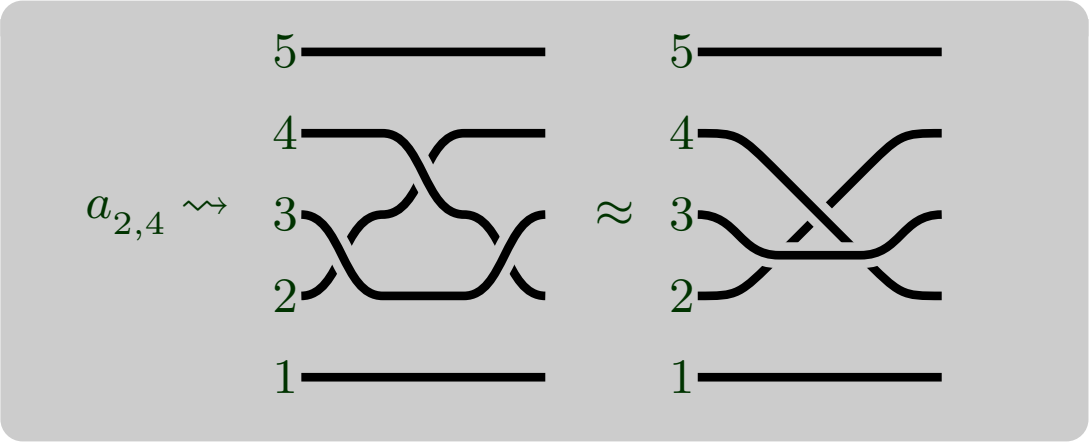
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

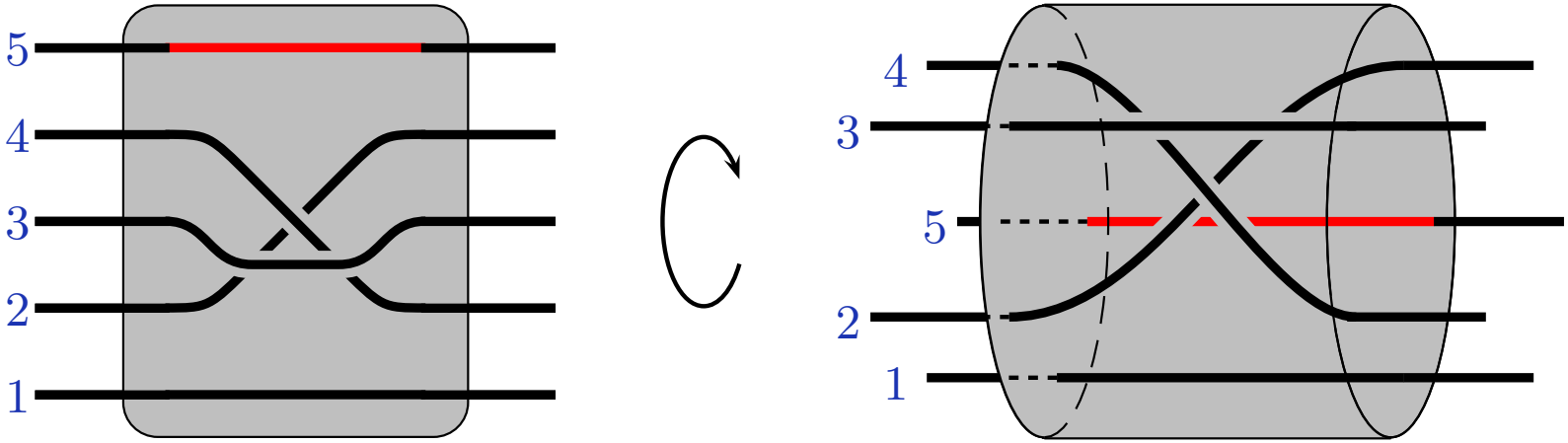




Les tresses $a_{p,q}$

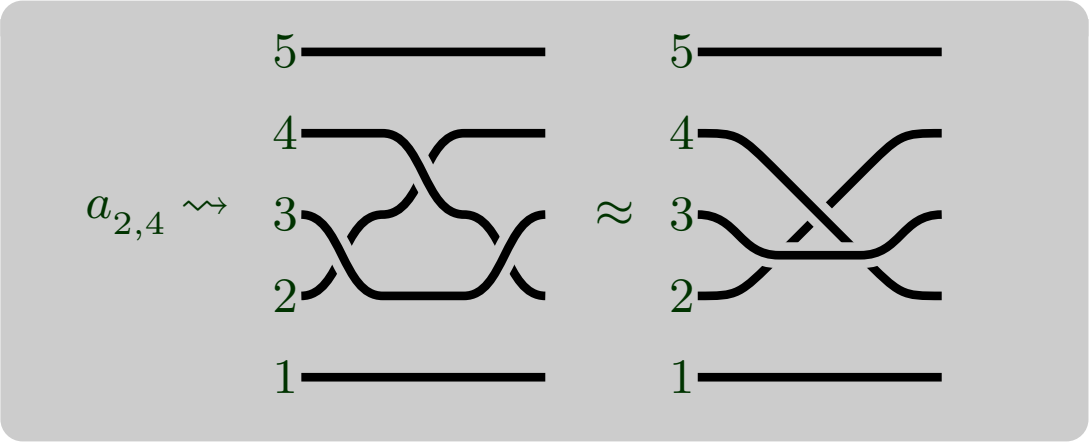
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

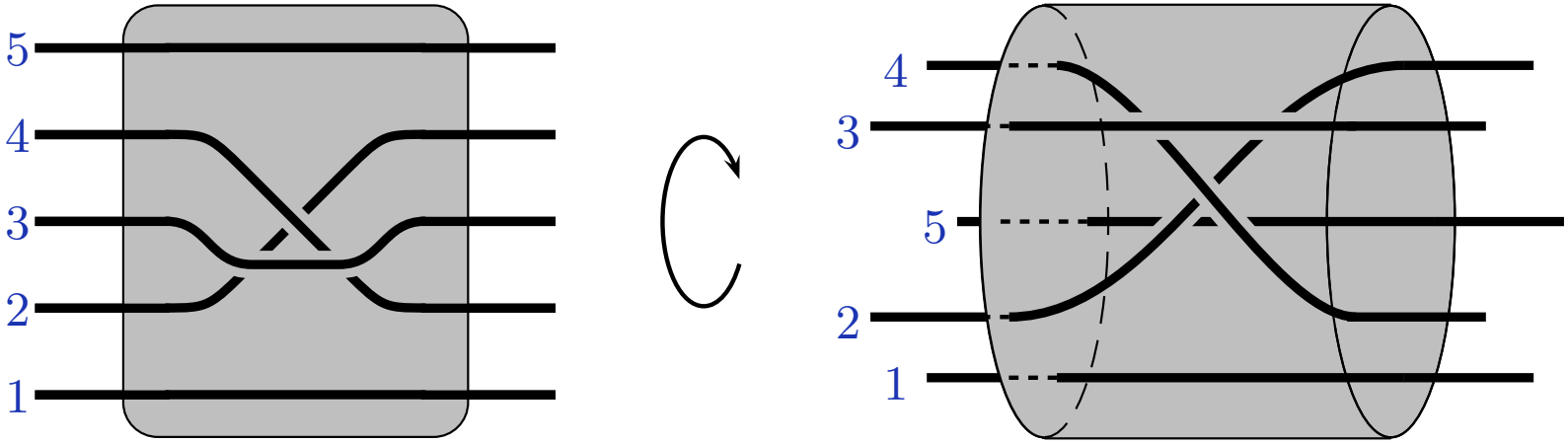




Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.





Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:

Relations entre les tresses $a_{p,q}$

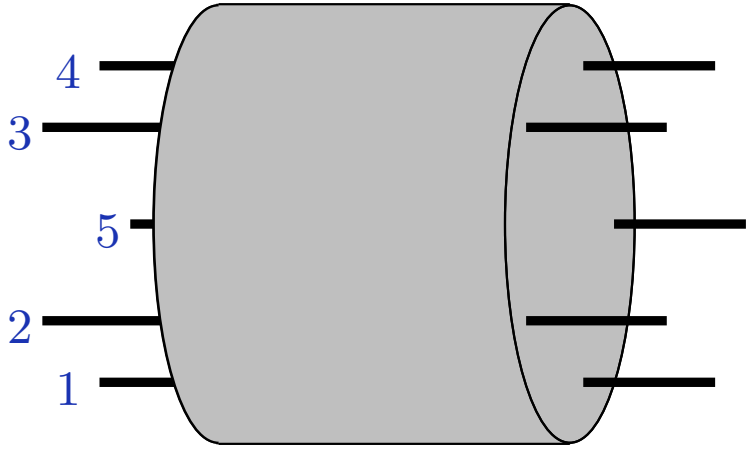
- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,

Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.

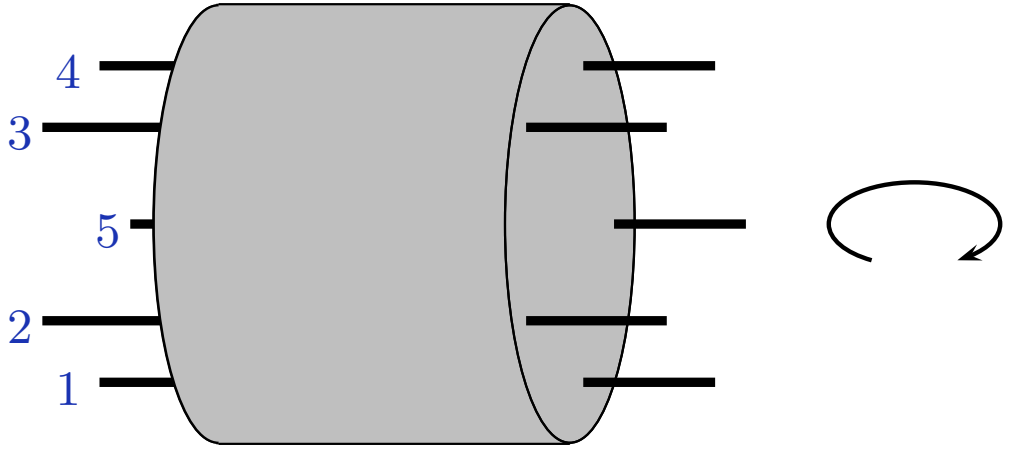
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



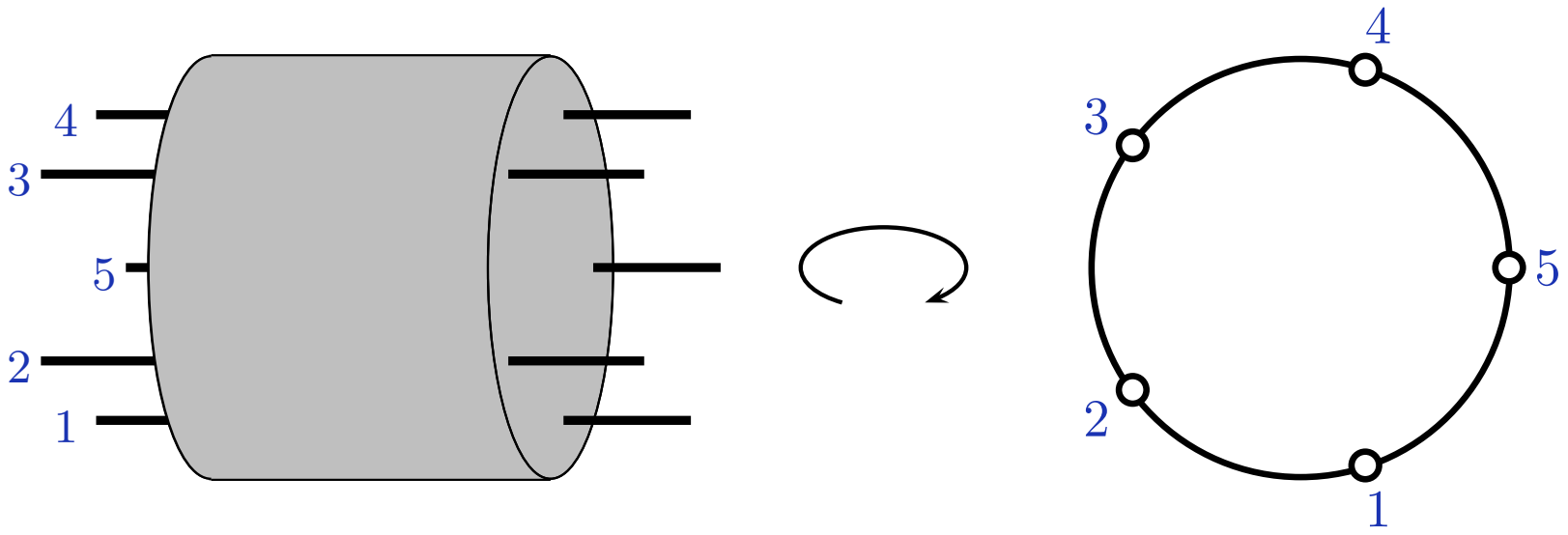
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



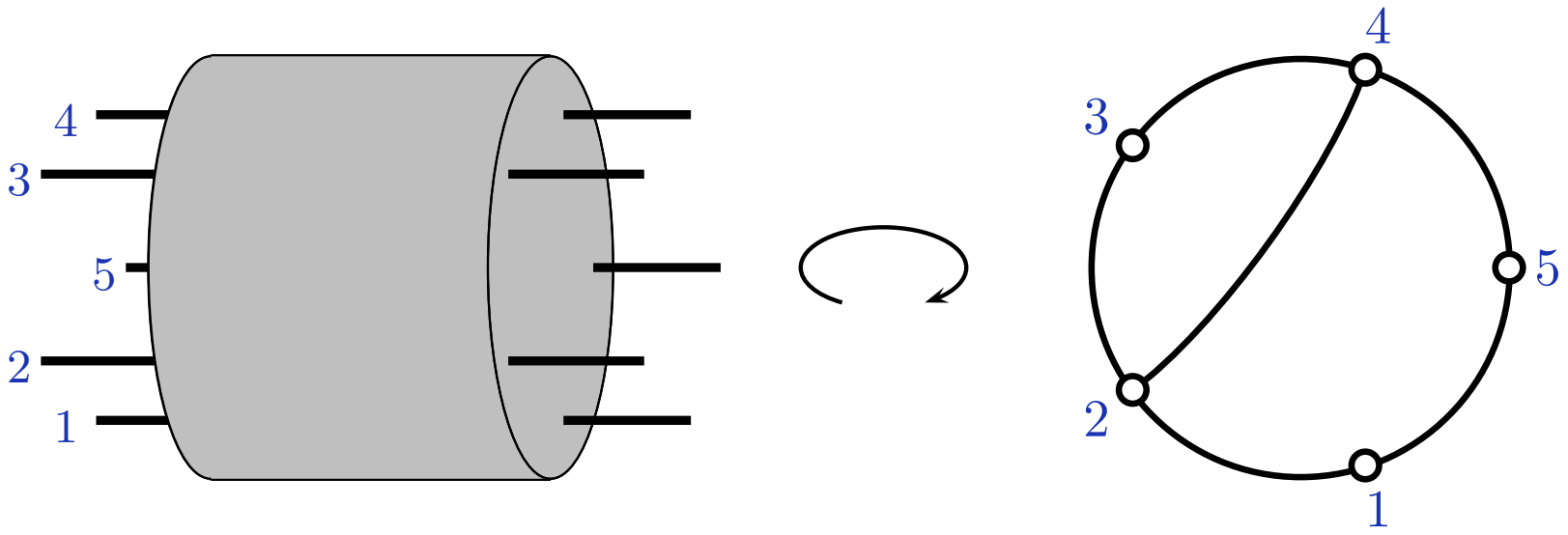
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



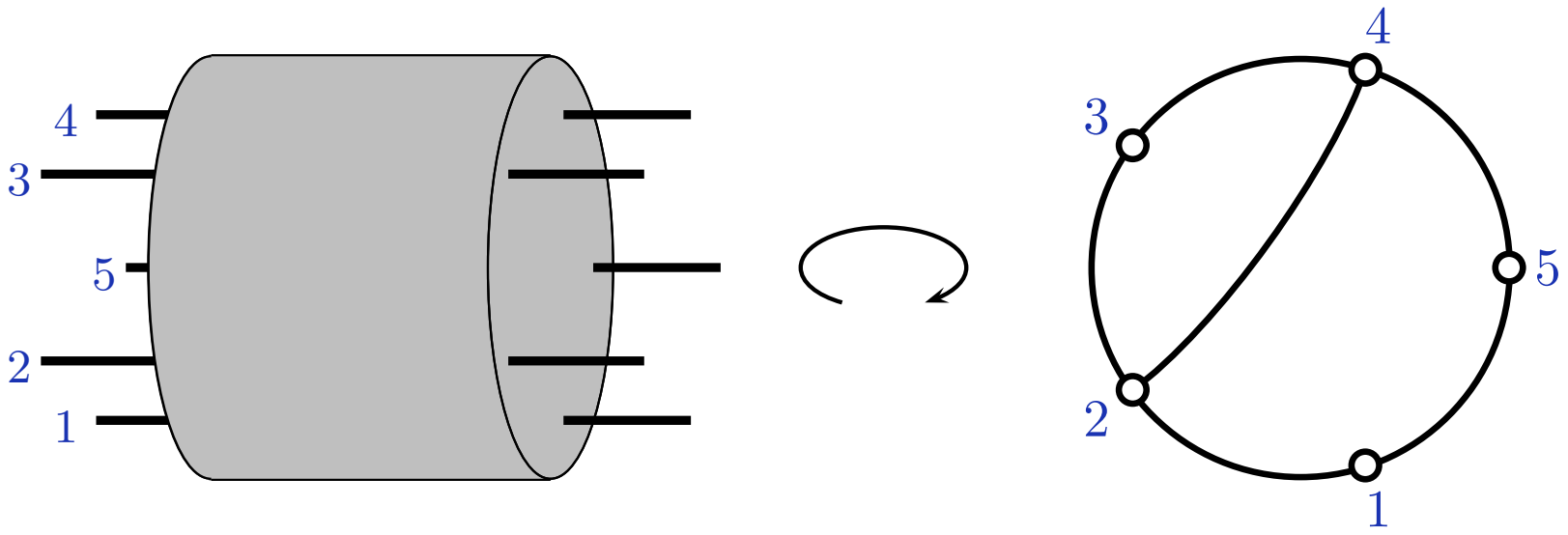
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



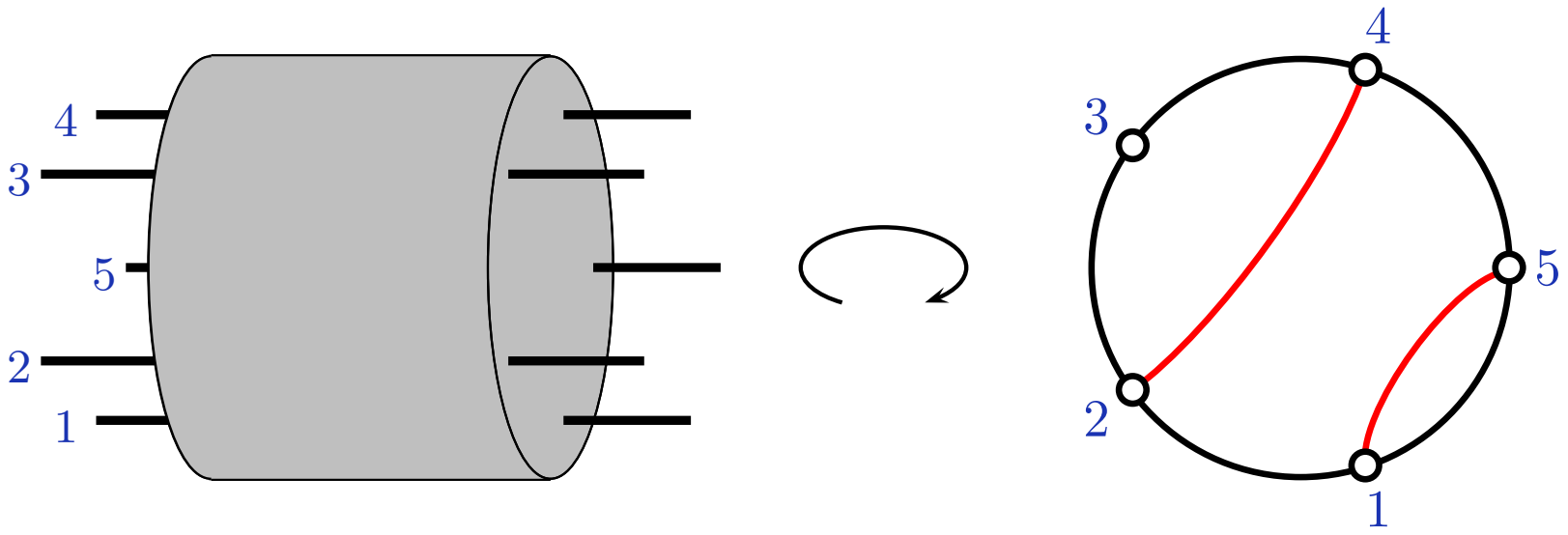
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



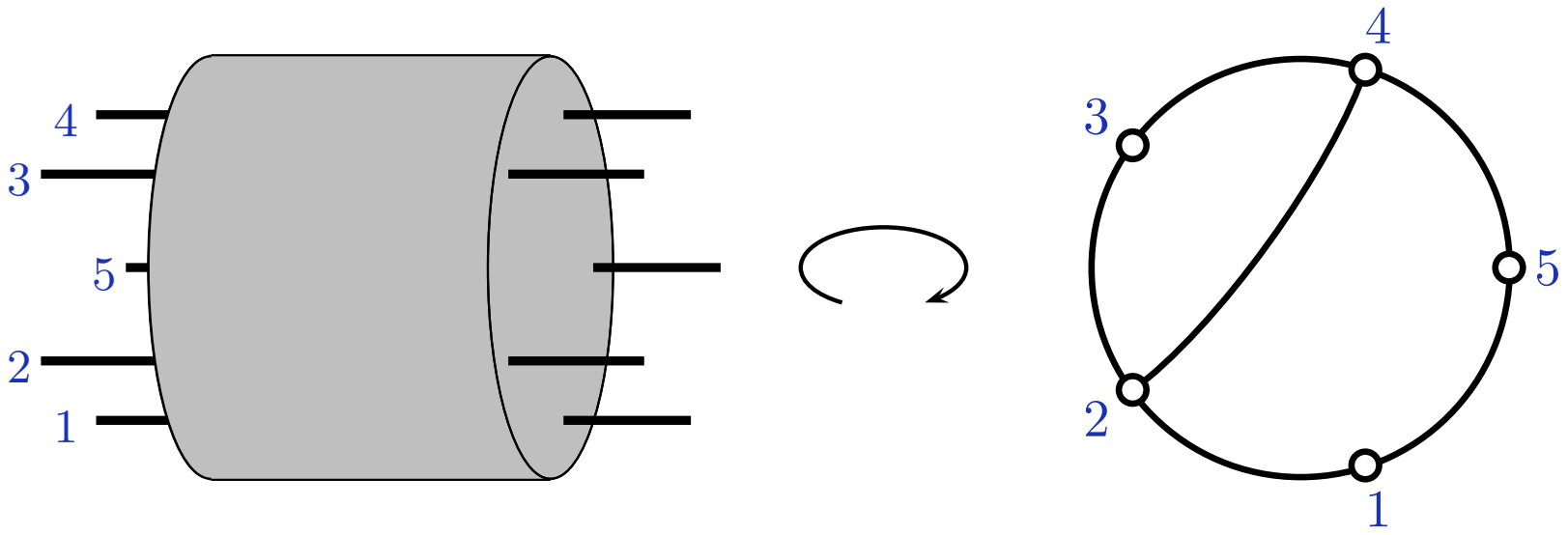
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



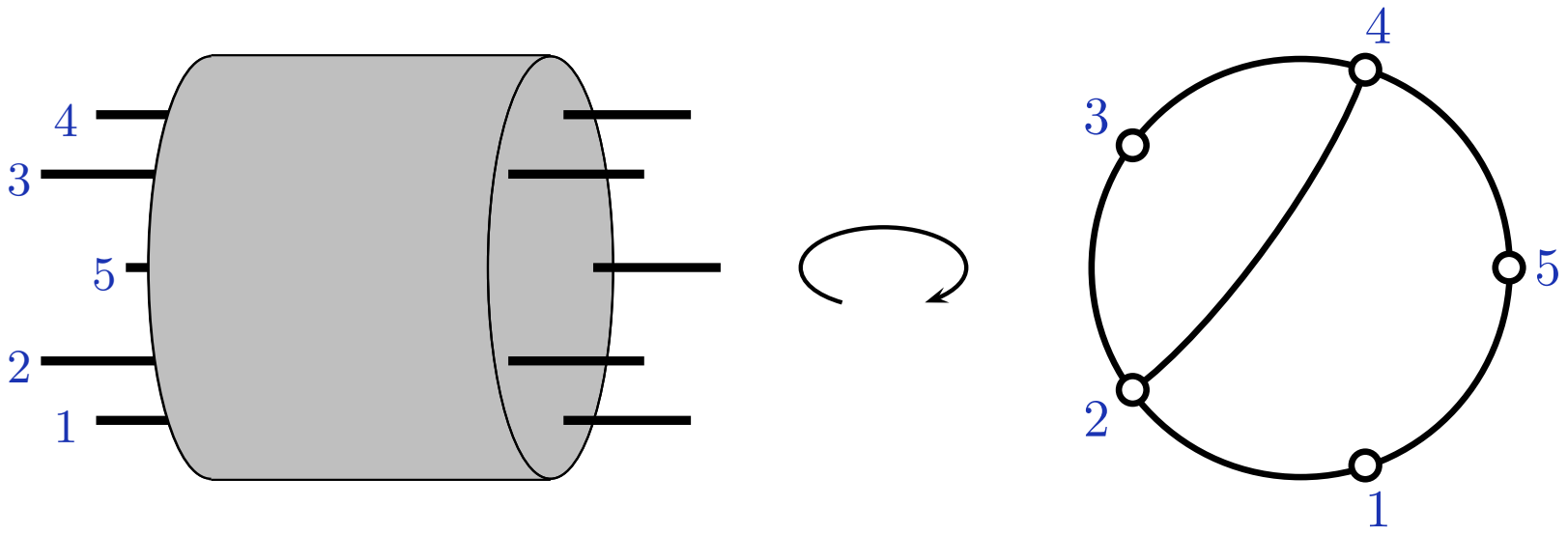
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



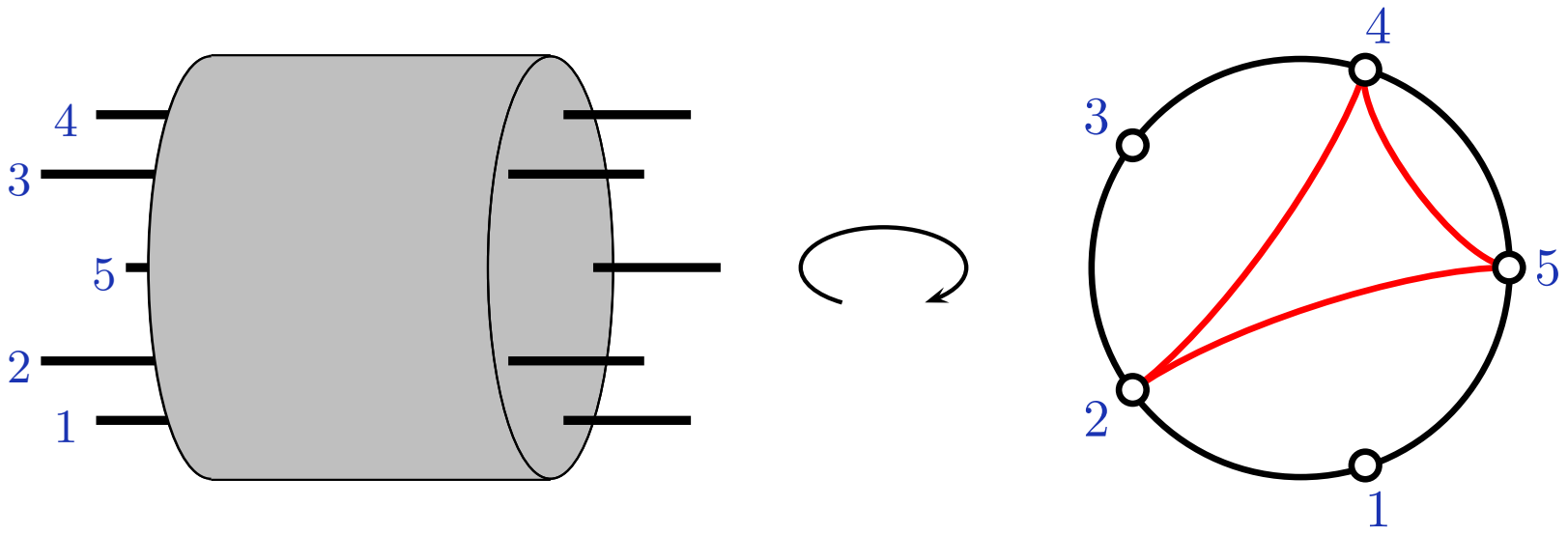
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



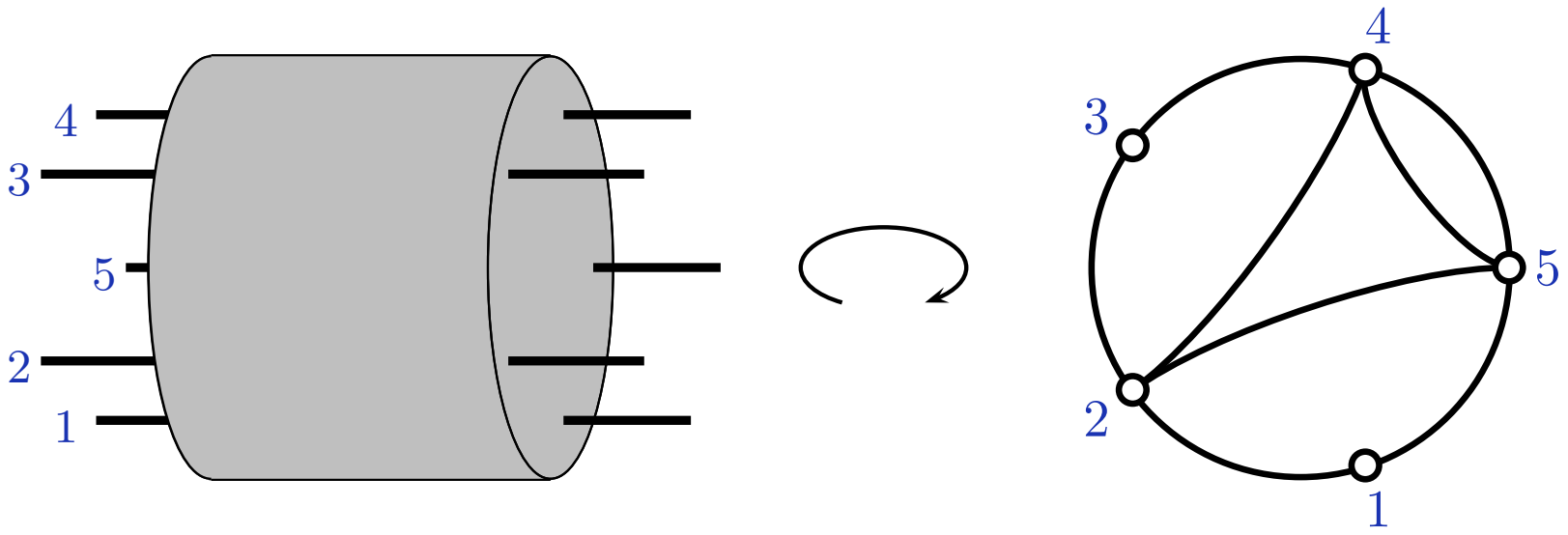
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

- **Définition :** Le monoïde de tresses dual à n brins B_n^{+*} est le sous-monoïde de B_n engendré par les $a_{p,q}$ avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$.

Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

- **Définition :** Le monoïde de tresses dual à n brins B_n^{+*} est le sous-monoïde de B_n engendré par les $a_{p,q}$ avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$.

- **Théorème (Birman–Ko–Lee '97) :** Relativement aux générateurs $a_{p,q}$, le monoïde de tresses dual B_n^{+*} est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

- **Définition :** Le monoïde de tresses dual à n brins B_n^{+*} est le sous-monoïde de B_n engendré par les $a_{p,q}$ avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$.

- **Théorème (Birman–Ko–Lee '97) :** Relativement aux générateurs $a_{p,q}$, le monoïde de tresses dual B_n^{+*} est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

$\rightsquigarrow$ B_n est le groupe de fractions de B_n^{+*}.

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

$\delta_2 = \sigma_1$

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

$\delta_2 = \sigma_1$, $\delta_3 = \sigma_1\sigma_2$

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

$\delta_2 = \sigma_1$, $\delta_3 = \sigma_1\sigma_2$,
$\delta_n = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1}$

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

$\delta_2 = \sigma_1$, $\delta_3 = \sigma_1\sigma_2$,
$\delta_n = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1}$

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

qui sont en bijections avec les partitions non-croisées de $\{1, \dots, n\}$

$\delta_2 = \sigma_1$, $\delta_3 = \sigma_1\sigma_2$, $\delta_n = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{n-1}$

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- **Proposition :** Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

qui sont en bijections avec les partitions non-croisées de $\{1, \dots, n\}$

$\delta_2 = \sigma_1$, $\delta_3 = \sigma_1\sigma_2$, $\delta_n = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{n-1}$

- **Proposition :** Toute tresse β de B_n^{+*} admet une unique décomposition $\beta_b \cdot \dots \cdot \beta_1$, où la tresse β_k est le diviseur à droite maximal de $\beta_b \cdot \dots \cdot \beta_k$ vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

Forme normale de Garside de B_n^{+*}

- **Proposition :** Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe un unique diviseur à droite maximal de β vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

qui sont en bijections avec les partitions non-croisées de $\{1, \dots, n\}$

$\delta_2 = \sigma_1$, $\delta_3 = \sigma_1\sigma_2$, $\delta_n = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{n-1}$

- **Proposition :** Toute tresse β de B_n^{+*} admet une unique décomposition $\beta_b \cdot \dots \cdot \beta_1$, où la tresse β_k est le diviseur à droite maximal de $\beta_b \cdot \dots \cdot \beta_k$ vivant dans $\mathrm{Div}_R(\delta_n)$.

$\rightsquigarrow$ Une forme normale de Garside sur B_n^{+*}

Reformulation du problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à un mot de tresses à n brins donné.

Reformulation du problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à un mot de tresses à n brins donné.

- Proposition: Tout mot de tresses w de longueur ℓ à n brins est équivalent à un unique mot de la forme $\delta_n^t\, w'$,

Reformulation du problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à un mot de tresses à n brins donné.

- Proposition: Tout mot de tresses w de longueur ℓ à n brins est équivalent à un unique mot de la forme $\delta_n^t\, w'$, où w' est un mot de B_n^{+*} en forme normale de Garside

Reformulation du problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à un mot de tresses à n brins donné.

- Proposition: Tout mot de tresses w de longueur ℓ à n brins est équivalent à un unique mot de la forme $\delta_n^t\, w'$, où w' est un mot de B_n^{+*} en forme normale de Garside avec $|w'| \leqslant \ell(n-2)$ et vérifiant $-\ell \leqslant t \leqslant \ell$.

Reformulation du problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à un mot de tresses à n brins donné.

- Proposition: Tout mot de tresses w de longueur ℓ à n brins est équivalent à un unique mot de la forme $\delta_n^t\, w'$, où w' est un mot de B_n^{+*} en forme normale de Garside avec $|w'| \leqslant \ell(n-2)$ et vérifiant $-\ell \leqslant t \leqslant \ell$.

$\rightsquigarrow$ si t est positif, alors $\delta_n^t\, w$ est σ-positif.

Reformulation du problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à un mot de tresses à n brins donné.

- Proposition: Tout mot de tresses w de longueur ℓ à n brins est équivalent à un unique mot de la forme $\delta_n^t\, w'$, où w' est un mot de B_n^{+*} en forme normale de Garside avec $|w'| \leqslant \ell(n-2)$ et vérifiant $-\ell \leqslant t \leqslant \ell$.

$\rightsquigarrow$ si t est positif, alors $\delta_n^t\, w$ est σ-positif.

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$

Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

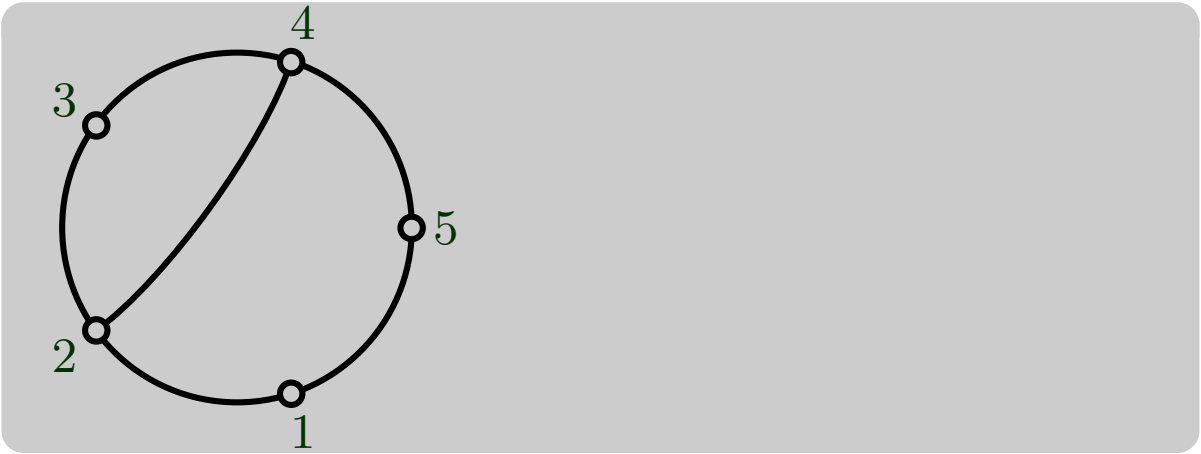
• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

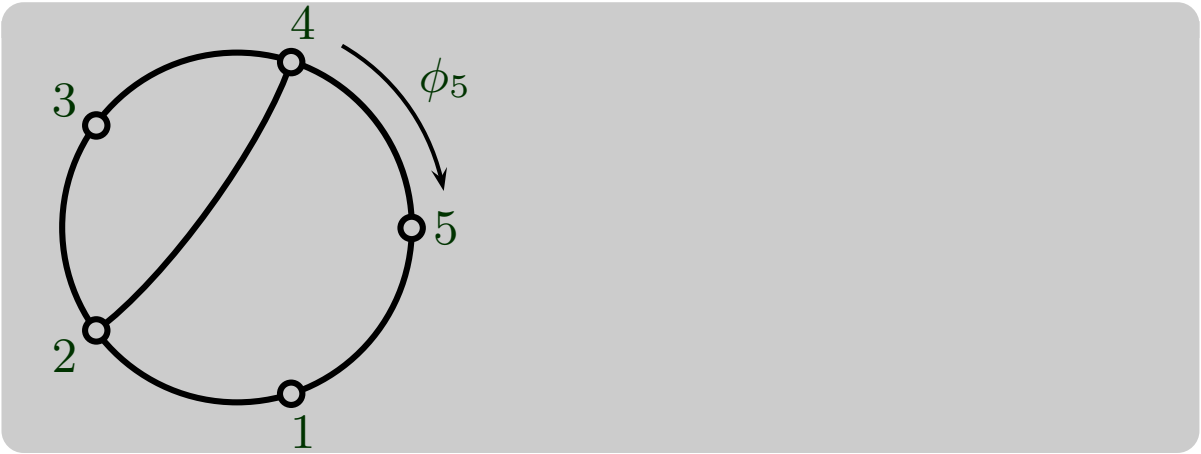


Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

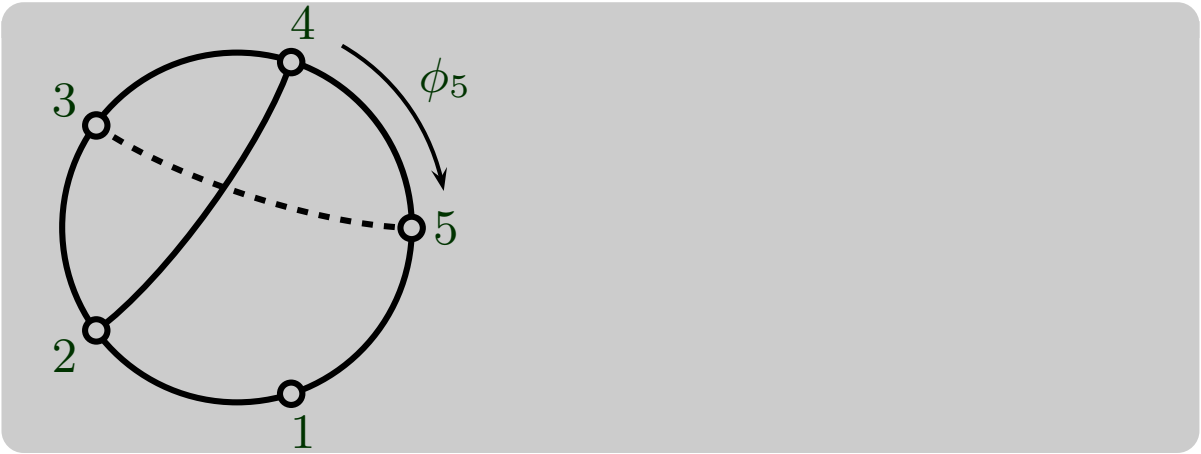


Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

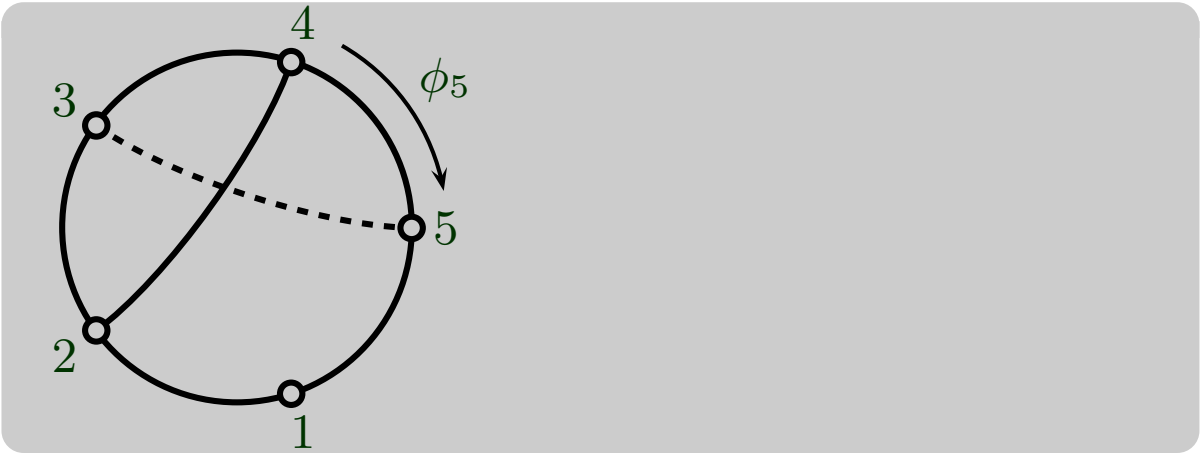


Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

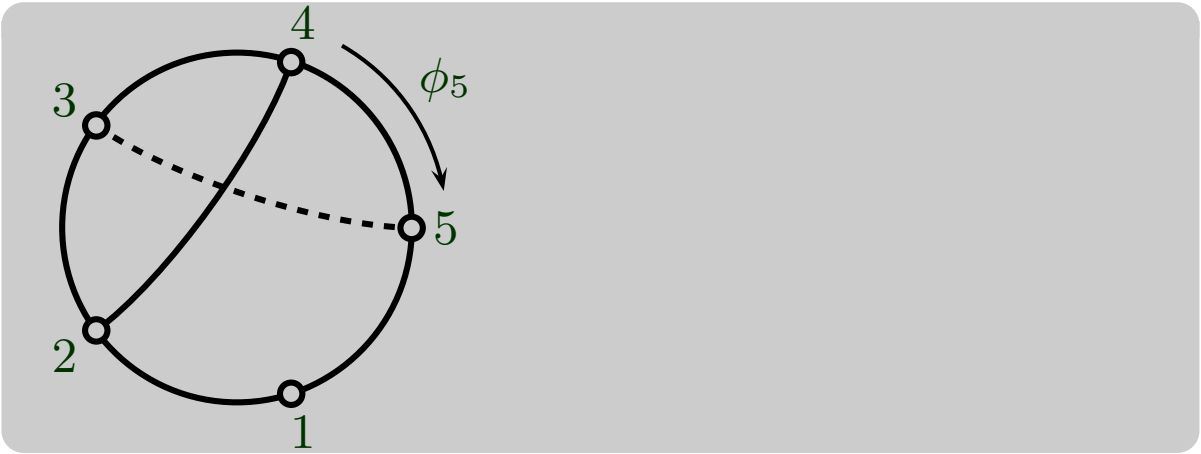


Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

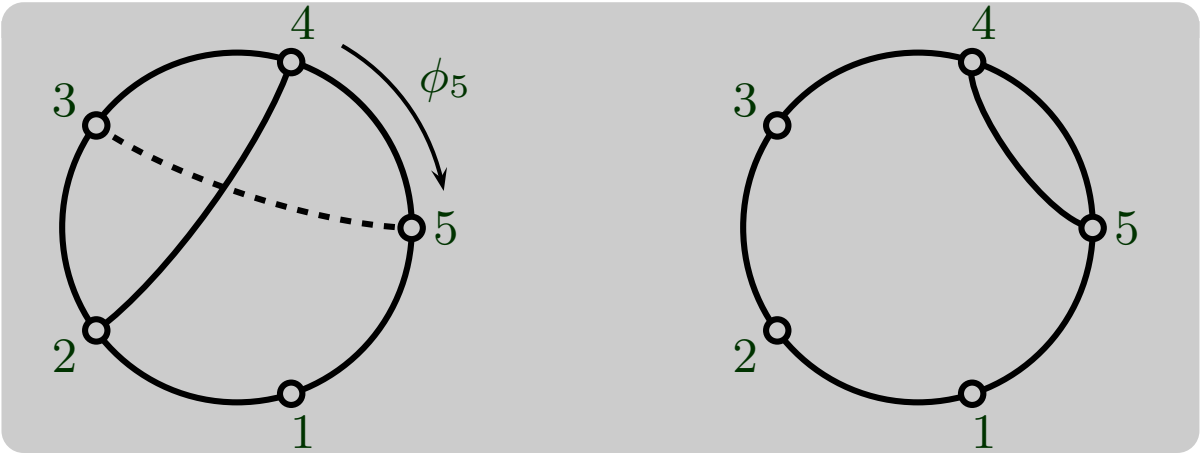


Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

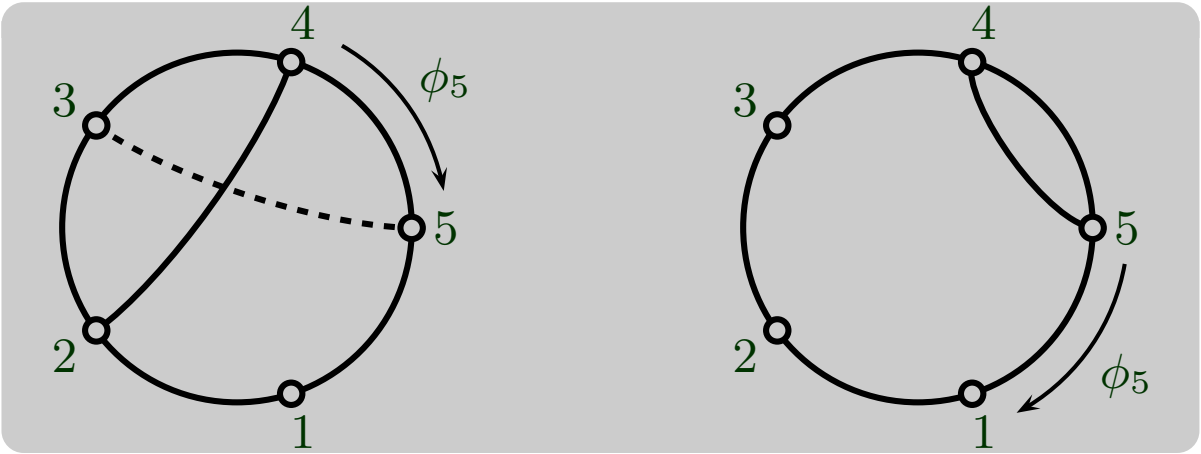


Automorphisme de Garside dual

• **Définition :** On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• **Lemme :** On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

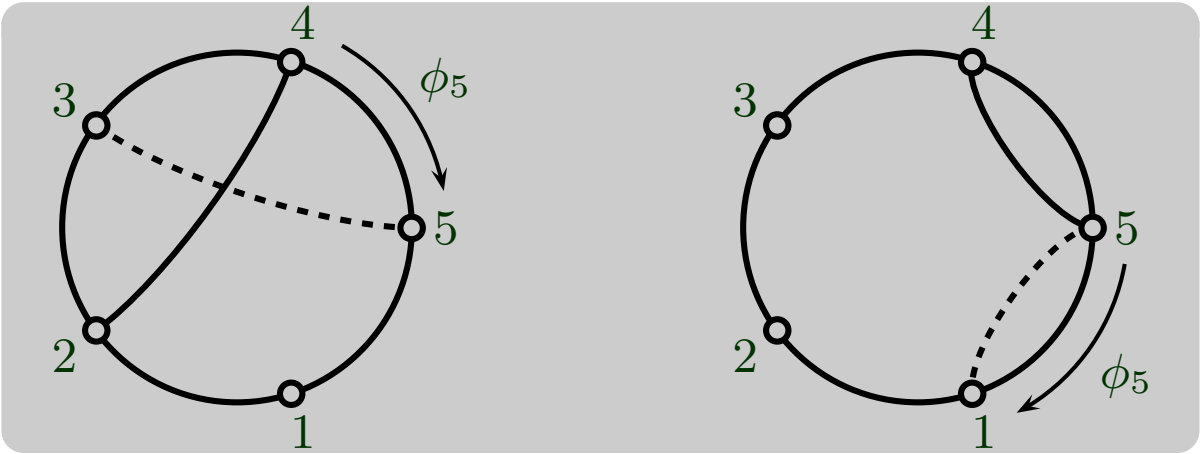


Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

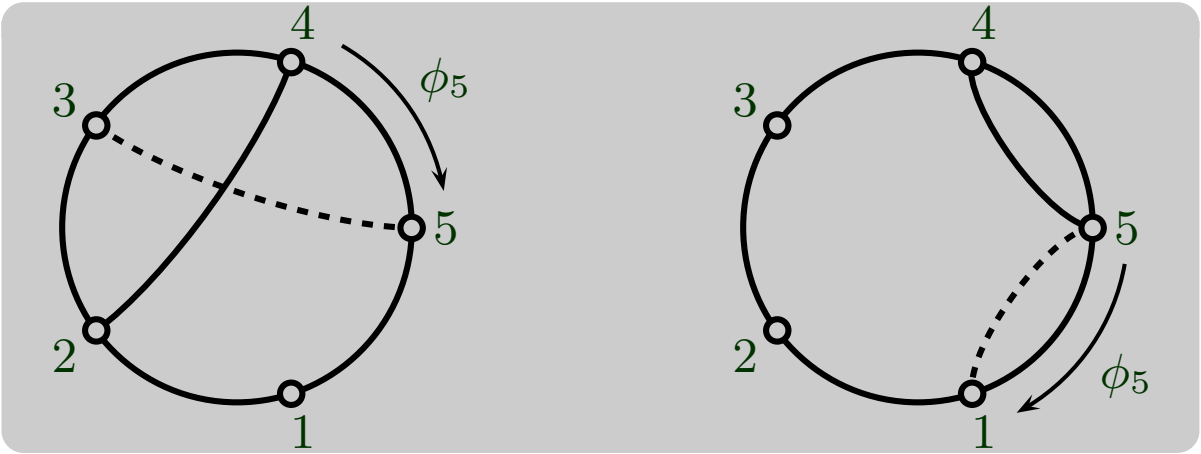


Automorphisme de Garside dual

• Définition : On définit ϕ_n comme étant l'automorphisme de B_n^{+*} associé à la tresse δ_n :

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

• Lemme : On a $\phi_n(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ et $\phi_n(a_{i,n}) = a_{1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.



Forme normale alternante

• Théorème (Dehornoy '07): Toute tresse β de B_n^+ admet une unique décomposition $\Phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(\beta_2) \cdot \beta_1$

Forme normale alternante

• Théorème (Dehornoy '07): Toute tresse β de B_n^+ admet une unique décomposition $\Phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(\beta_2) \cdot \beta_1$, où pour tout k, la tresse β_k est le plus grand diviseur à droite de $\Phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot .. \cdot \beta_k$ vivant dans B_{n-1}^+.

Forme normale alternante

• Théorème (Dehornoy '07): Toute tresse β de B_n^+ admet une unique décomposition $\Phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(\beta_2) \cdot \beta_1$, où pour tout k, la tresse β_k est le plus grand diviseur à droite de $\Phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot .. \cdot \beta_k$ vivant dans B_{n-1}^+.

Φ_n est l'automorphisme flip

Forme normale alternante

• Théorème (Dehornoy '07): Toute tresse β de B_n^+ admet une unique décomposition $\Phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(\beta_2) \cdot \beta_1$, où pour tout k, la tresse β_k est le plus grand diviseur à droite de $\Phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot .. \cdot \beta_k$ vivant dans B_{n-1}^+.

Φ_n est l'automorphisme flip

$(\beta_b, \ldots, \beta_1)$ est le Φ_n-éclatement de β.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2,

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 =$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est $a_{1,2}^2$.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresse dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur à droite maximal β_1 vivant dans B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, *i.e.*, la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2 à droite.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

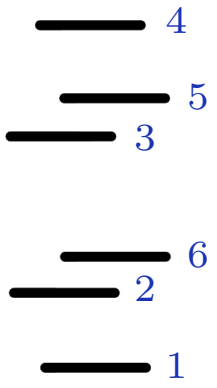
$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est $a_{1,2}^2$.

Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n \ B_{n-1}^{+*}$, $\phi_n^2 \ B_{n-1}^{+*}$, ... de B_n^{+*}.

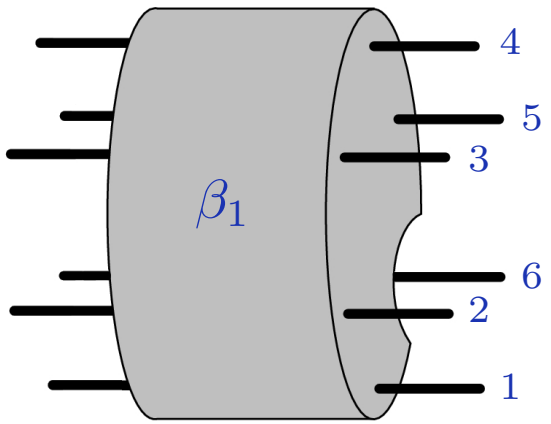
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n \ B_{n-1}^{+*}$, $\phi_n^2 \ B_{n-1}^{+*}$, ... de B_n^{+*}.



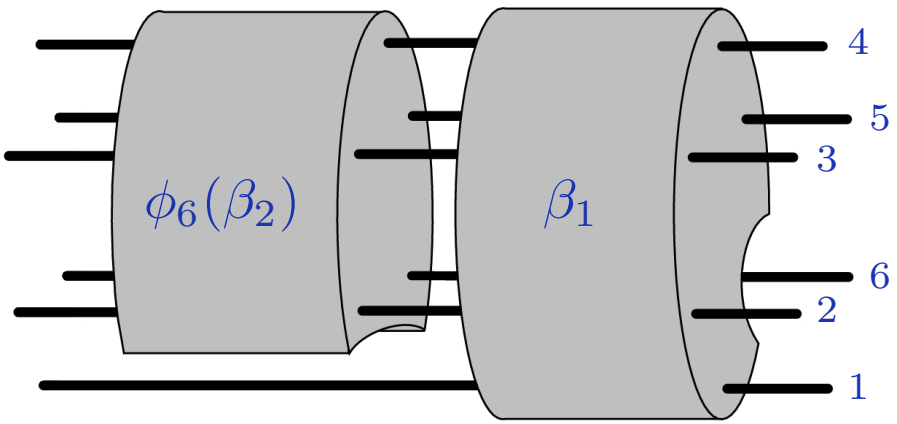
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n \ B_{n-1}^{+*}$, $\phi_n^2 \ B_{n-1}^{+*}$, ... de B_n^{+*}.



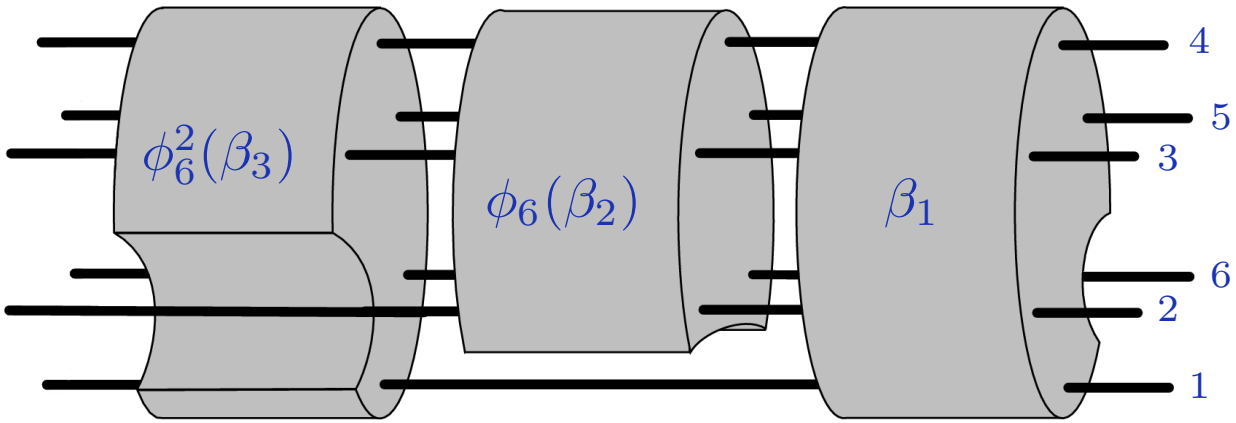
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n \ B_{n-1}^{+*}$, $\phi_n^2 \ B_{n-1}^{+*}$, ... de B_n^{+*}.



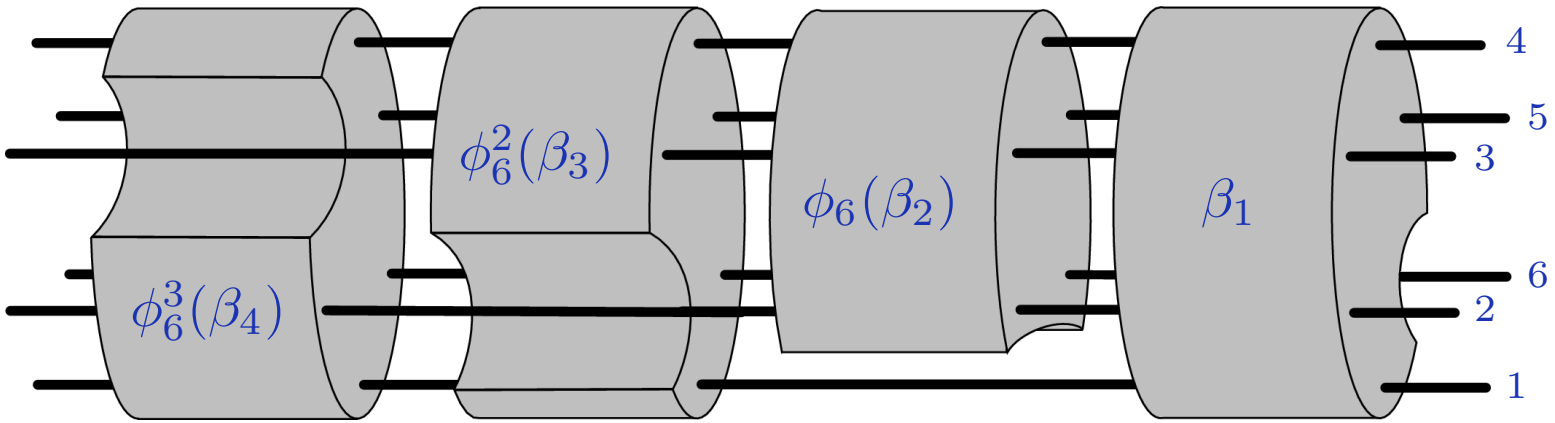
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n \ B_{n-1}^{+*}$, $\phi_n^2 \ B_{n-1}^{+*}$, ... de B_n^{+*}.



Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n \ B_{n-1}^{+*}$, $\phi_n^2 \ B_{n-1}^{+*}$, ... de B_n^{+*}.



Le ϕ_n-éclatement

• **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

- $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,
- β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

Le ϕ_n-éclatement

• Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

- $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,
- β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• Définition : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.

Le ϕ_n-éclatement

• Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

– $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

– β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• Définition : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
L'entier b est appelé la ϕ_n-largeur de β.

Le ϕ_n-éclatement

• Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

– $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

– β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• Définition : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
L'entier b est appelé la ϕ_n-largeur de β.

• Exemple :

Le ϕ_n-éclatement

• Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

– $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

– β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• Définition : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
L'entier b est appelé la ϕ_n-largeur de β.

• Exemple :

– Pour $j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.

Le ϕ_n-éclatement

• Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

– $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

– β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• Définition : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
L'entier b est appelé la ϕ_n-largeur de β.

• Exemple :

– Pour $j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.

– Pour $i \geqslant 2$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,n}$ est $(\ a_{i-1,n-1},\ 1\ )$.

Le ϕ_n-éclatement

• **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

– $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

– β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
L'entier b est appelé la ϕ_n-largeur de β.

• **Exemple** :

– Pour $j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.

– Pour $i \geqslant 2$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,n}$ est $(\ a_{i-1,n-1},\ 1\ )$.

– Le ϕ_n-éclatement de $a_{1,n}$ est $(\ a_{n-2,n-1},\ 1,\ 1\ )$.

Le ϕ_n-éclatement

• **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

– $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

– β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
L'entier b est appelé la ϕ_n-largeur de β.

• **Exemple** :

– Pour $j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.

– Pour $i \geqslant 2$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,n}$ est $(\ a_{i-1,n-1},\ 1\ )$.

– Le ϕ_n-éclatement de $a_{1,n}$ est $(\ a_{n-2,n-1},\ 1,\ 1\ )$.

– Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(\ a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2\ )$.

La forme normale tournante

- Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

La forme normale tournante

- Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$,

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 =$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = \qquad a_{1,2}^2$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = \qquad a_{1,2}^2$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = \quad a_{1,3}a_{1,2}^2$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}^2$.

Retour au problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$
où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

Retour au problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

A l'aide de la forme normale tournante on le transforme en :

Retour au problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$
où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

A l'aide de la forme normale tournante on le transforme en :

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$
où on a $t < 0$ et w est un m.n.t de B_n^{+*}.

Retour au problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$
où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

A l'aide de la forme normale tournante on le transforme en :

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$
où on a $t < 0$ et w est un m.n.t de B_n^{+*}.

$\rightsquigarrow$ On obtient des mots σ-positifs

Retour au problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

A l'aide de la forme normale tournante on le transforme en :

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est un m.n.t de B_n^{+*}.

$\rightsquigarrow$ On obtient des mots σ-positifs et des mots σ-négatifs.

Retour au problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

A l'aide de la forme normale tournante on le transforme en :

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est un m.n.t de B_n^{+*}.

$\rightsquigarrow$ On obtient des mots σ-positifs et des mots σ-négatifs.

- Question : Existe-t-il une relation portant sur t et w pouvant distinguer ces deux cas ?

Retour au problème

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est mot de B_n^{+*}.

A l'aide de la forme normale tournante on le transforme en :

- Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, w$ où on a $t < 0$ et w est un m.n.t de B_n^{+*}.

$\rightsquigarrow$ On obtient des mots σ-positifs et des mots σ-négatifs.

- Question : Existe-t-il une relation portant sur t et w pouvant distinguer ces deux cas ?

On a deux cas, en fonctions de la position de$t$ par rapport à $-b+2$.

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

• On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \ \delta_n^t\ \ \phi_n^{b-1}(w_b)\ \ \phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^t\ \ \phi_n^{b-1}(w_b)\ \ \phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$-b+1$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^t\ \ \phi_n^{b-1}(w_b)\ \overset{\delta_n^{-b+1}}{\downarrow}\phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$\delta_n^t\ \phi_n^{b-1}(w_b) \xrightarrow{-b+1} \phi_n^{b-2}(w_{b-1})$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \overset{t+b-1}{\delta_n^{\cancel{t}}}\ \phi_n^{b-1}(w_b)\ \overset{\delta_n^{-b+1}}{\downarrow}\phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$-b+1$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• **Proposition :** Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \overset{t+b-1}{\delta_n^{\cancel{t}}}\ \cancel{\phi_n^{b-1}}(w_b)\ \overset{\delta_n^{-b+1}}{\downarrow}\phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$-b+1$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• **Proposition :** Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \overset{t+b-1}{\delta_n^{\cancel{t}}}\ \cancel{\phi_n^{b-1}}(w_b)\ \overset{\delta_n^{-b+1}}{\downarrow}\phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$-b+1$$

$$\delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-b+1}$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-b+1} \phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$\delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-b+1}$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-b+1} \phi_n^{b-2}(w_{b-1})\ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-b+1} \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$-b+2$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-b+1} \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \overset{\delta_n^{-b+2}}{\dots}\ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$-b+2$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{\overset{-1}{\cancel{-b+1}}} \phi_n^{b-2}(w_{b-1})\, \overset{\delta_n^{-b+2}}{\dots}\ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$-b+2$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-b+1}\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

-1 $\quad$ δ_n^{-b+2} $\quad$ $-b+2$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• **Proposition :** Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-1}\, \cancel{\phi_n^{b-1}}\, \cancel{\phi_n^{b-2}}(w_{b-1}) \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$\delta_n^{-b+2}$$

$$-b+2$$

$$\delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-b+2}$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-b+2}\ \ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$\delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-b+2}$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \ \delta_n^{-1}\ \ w_{b-1}\ \delta_n^{-b+2}\ \ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \ \delta_n^{-1}\ \ w_{b-1}\ \ \delta_n^{-b+2}\ \ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$-b+3$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \ \delta_n^{-1}\ \ w_{b-1}\ \delta_n^{-b+2}\ \ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$-b+3$ $\quad -2$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \ \delta_n^{-1}\ \ w_{b-1}\ \ \delta_n^{-b+2}\ \ \dots\ \ \phi_n(w_2)\ \ w_1.$$

$-b+3$ $\quad -2$

$\delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-2}$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-2}\, \phi_n(w_2)\ w_1.$$

$$\delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-2}$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-2}\, \flat_n(w_2)\ w_1.$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-2}\, \phi_n(w_2)\ w_1.$$

-1

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b+2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\; w \;\equiv\; \delta_n^{t+b-1}\, w_b\;\; \delta_n^{-1}\;\; w_{b-1}\;\; \delta_n^{-1}\;\; \dots\;\; \delta_n^{-2}\, \phi_n(w_2)\, w_1.$$

δ_n^{-1}

-1

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-2}\, \phi_n(w_2)\, w_1.$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w \ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-2}\, \phi_n(w_2)\, w_1.$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-1}\ w_2\ \delta_n^{-1}\ w_1.$$

$$\delta_n^{-1}\ w_2\ \delta_n^{-1}$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-1}\ w_2\ \delta_n^{-1}\ w_1.$$

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-1}\ w_2\ \delta_n^{-1}\ w_1.$$

- On pose $w' = \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-1}\, w_{b-1}\, \delta_n^{-1} \dots \delta_n^{-1} w_2\, \delta_{n1}\, w_2\, \delta_n^{-1}\, w_1$.

Cas du dénominateur très négatif : $t < -b + 2$

• Proposition : Soit w un m.n.t. de longueur ℓ et de largeur $b \geqslant 2$.
Alors pour tout $t < -b + 2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est équivalent
à un a,δ-mot σ_{n-1}-négatif de longueur $\ell - t$.

- On a $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\, \phi_n^{b-2}(w_{b-1}) \dots \phi_n(w_2)\, w_1$, avec $w_k \in \underline{B}_{n-1}^{+*}$.
- Pour tout u de $\underline{B}_n^{+*}$, on a $\delta_n^{-1}\, \phi_n^k(u) \equiv \phi_n^{k-1}(u)\, \delta_n^{-1}$.
- En poussant les δ_n^{-1} vers la droite, on calcule

$$\delta_n^t\ w\ \equiv\ \delta_n^{t+b-1}\, w_b\ \delta_n^{-1}\ w_{b-1}\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \delta_n^{-1}\ w_2\ \delta_n^{-1}\ w_1.$$

- On pose $w' = \delta_n^{t+b-1}\, w_b\, \delta_n^{-1}\, w_{b-1}\, \delta_n^{-1} \dots \delta_n^{-1} w_2\, \delta_{n1}\, w_2\, \delta_n^{-1}\, w_1$.
- On conclut.

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$.

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \delta_4^{-2}\ \ \phi_4^3(a_{1,3})\ \ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \delta_4^{-2}\ \ \phi_4^3(a_{1,3})\ \ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

-2

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \cancel{\delta_4^{-2}}\ \ \phi_4^3(a_{1,3})\ \ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

-2

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \cancel{\delta_4^{-2}}\ \ \phi_4^3(a_{1,3})\ \overset{\delta_4^{-2}}{\downarrow}\ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

$$-2$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \cancel{\delta_4^{-2}}\ \ \phi_4^3(a_{1,3})\ \overset{\delta_4^{-2}}{\downarrow}\ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

$$-2$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \cancel{\delta_4^{-2}}\ \ \phi_4^{\overset{1}{\cancel{3}}}(a_{1,3})\ \overset{\delta_4^{-2}}{\downarrow}\ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

$$-2$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\ \ \delta_4^{-2}\ \ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\ \ \delta_4^{-2}\ \ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

-1

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\ \ \cancel{\delta_4^{-2}}\ \ \phi_4^2(a_{1,3})\ \ \phi_4(a_{1,3})$$

-1

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\ \ \cancel{\delta_4^{-2}}\ \ \phi_4^2(a_{1,3})\overset{\delta_n^{-1}}{\downarrow}\phi_4(a_{1,3})$$

$$-1$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\ \ \cancel{\delta_4^{-2}}\ \ \phi_4^{\overset{1}{\cancel{2}}}(a_{1,3})\overset{\delta_n^{-1}}{\downarrow}\phi_4(a_{1,3})$$

$$-1$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})$$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})$$

- Problème : $\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}$ est

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})$$

- Problème : $\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}$ est σ_3-négatif

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})$$

- Problème : $\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}$ est σ_3-négatif et $\phi_4(a_{1,3})$

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})$$

- Problème : $\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}$ est σ_3-négatif et $\phi_4(a_{1,3})$ est σ_3-positif.

Et pour $t \geqslant -b+2$?

- Question : A-t-on la même chose dans le cas $t \geqslant -b+2$?

$\rightsquigarrow$ Malheureusement, non (pas directement).

- Exemple : Soit w le m.n.t $\phi_4^3(a_{1,3})\,\phi_4^2(a_{1,3})\,\phi_4(a_{1,3})$. Alors on calcule

$$\delta_4^{-2}\ w \ \equiv\ \phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}\,\phi_4(a_{1,3})$$

- Problème : $\phi_4(a_{1,3})\,\delta_4^{-1}$ est σ_3-négatif et $\phi_4(a_{1,3})$ est σ_3-positif.

- Idée : Ne pas regarder seulement un terme à la fois mais deux.

Notions de dangereux et échelles

- Problème : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, trouver un mot σ-défini équivalent à w.

Notions de dangereux et échelles

- Problème : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, trouver un mot σ-défini équivalent à w.

- Principe : Il existe des notions de dangereux et d'échelle telles que :

  ϕ_n(dangereux) $\bullet$ échelle

Notions de dangereux et échelles

- Problème : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, trouver un mot σ-défini équivalent à w.

- Principe : Il existe des notions de dangereux et d'échelle telles que :

ϕ_n(dangereux) $\bullet$ échelle $=$

Notions de dangereux et échelles

- Problème : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, trouver un mot σ-défini équivalent à w.

- Principe : Il existe des notions de dangereux et d'échelle telles que :

$$\phi_n(\text{dangereux}) \bullet \text{échelle} = \text{mot sans } \sigma_{n-1}^{-1} \bullet \phi_n^{-1}(\delta_n) \bullet \text{dangereux}$$

$$\text{échelle} =$$

Notions de dangereux et échelles

- Problème : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, trouver un mot σ-défini équivalent à w.

- Principe : Il existe des notions de dangereux et d'échelle telles que :

$$\phi_n(\text{dangereux}) \bullet \text{échelle} \quad = \quad \text{mot sans } \sigma_{n-1}^{-1} \bullet \phi_n^{-1}(\delta_n) \bullet \text{dangereux}$$

$$\text{échelle} \quad = \quad \text{mot sans } \sigma_{n-1}^{-1} \bullet \delta_n \bullet \text{dangereux}$$

- Proposition : Un mot normal tournant est une échelle.

- Fait : Un mot dangereux u est σ_{n-3}-négatifs, $\phi_n(u)$ est σ_{n-2}-négatifs, mais $\phi_n^2(u)$ est σ_{n-1}-négative.

Mots dangereux

- Définition : Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

Mots dangereux

- Définition : Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

$\rightsquigarrow$ on a $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q-1}\ a_{q-1,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$,

Mots dangereux

- Définition : Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

$\rightsquigarrow$ on a $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q-1}\ a_{q-1,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$, ou bien encore $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$.

Mots dangereux

- Définition : Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

$\rightsquigarrow$ on a $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q-1}\ a_{q-1,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$, ou bien encore $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$.

- Définition : Un δ-mot est dit $a_{p,n}$-dangereux s'il s'écrit

Mots dangereux

- Définition : Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

$\rightsquigarrow$ on a $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q-1}\ a_{q-1,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$, ou bien encore $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$.

- Définition : Un δ-mot est dit $a_{p,n}$-dangereux s'il s'écrit

$$\delta_{f(d),n-1}^{-1}\ \delta_{f(d-1),n-1}^{-1} \cdots \delta_{f(2),n-1}^{-1}\ \ \delta_{f(1),n-1}^{-1},$$

Mots dangereux

- **Définition :** Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

$\rightsquigarrow$ on a $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q-1}\ a_{q-1,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$, ou bien encore $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$.

- **Définition :** Un δ-mot est dit $a_{p,n}$-dangereux s'il s'écrit

$$\delta_{f(d),n-1}^{-1}\ \delta_{f(d-1),n-1}^{-1} \cdots \delta_{f(2),n-1}^{-1}\ \ \delta_{f(1),n-1}^{-1},$$

avec $n-2 \geqslant f(d) > \ \dots\ > f(1) \geqslant p$.

Mots dangereux

- Définition : Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

$\rightsquigarrow$ on a $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q-1}\ a_{q-1,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$, ou bien encore $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$.

- Définition : Un δ-mot est dit $a_{p,n}$-dangereux s'il s'écrit

$$\delta_{f(d),n-1}^{-1}\ \delta_{f(d-1),n-1}^{-1} \cdots \delta_{f(2),n-1}^{-1}\ \ \delta_{f(1),n-1}^{-1},$$

avec $n-2 \geqslant f(d) > \ \dots\ > f(1) \geqslant p$.

- Exemple : On a $a_{p-1,n-1} \equiv \delta_{p-1,n-1}\ \delta_{p-1,n-2}^{-1}$.

Mots dangereux

- **Définition :** Pour $p < q$, on pose $\delta_{p,q} = \sigma_p \dots \sigma_{q-1}$.

$\rightsquigarrow$ on a $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q-1}\ a_{q-1,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$, ou bien encore $a_{p,q} \equiv \delta_{p,q}\ \delta_{p,q-1}^{-1}$.

- **Définition :** Un δ-mot est dit $a_{p,n}$-dangereux s'il s'écrit

$$\delta_{f(d),n-1}^{-1}\ \delta_{f(d-1),n-1}^{-1} \cdots \delta_{f(2),n-1}^{-1}\ \ \delta_{f(1),n-1}^{-1},$$

avec $n-2 \geqslant f(d) > \ \dots\ > f(1) \geqslant p$.

- **Exemple :** On a $a_{p-1,n-1} \equiv \delta_{p-1,n-1}\ \delta_{p-1,n-2}^{-1}$.

$\rightsquigarrow$ Le mot $\delta_{p-1,n-2}^{-1}$ est $a_{p,n-1}$-dangereux.

Échelle

- Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe

Échelle

- Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,

Échelle

- Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,
  et une suite $p = f(0) < f(1) < \ldots < f(h) = n-1$ telles que :

Échelle

- Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,
  et une suite $p = f(0) < f(1) < \ldots < f(h) = n-1$ telles que :
  – pour tout $k \leqslant h$, la lettre x_k est de la forme $a_{r,f(k)}$
  avec $r < f(k-1) < f(k)$,

Échelle

- Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,
  et une suite $p = f(0) < f(1) < \ldots < f(h) = n-1$ telles que :
  – pour tout $k \leqslant h$, la lettre x_k est de la forme $a_{r,f(k)}$
  avec $r < f(k-1) < f(k)$,
  – pour tout $k < h$, le mot w_k ne contient pas de letter $a_{r,s}$
  avec $q-1 < f(k) < s$,

Échelle

- Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,
  et une suite $p = f(0) < f(1) < \ldots < f(h) = n-1$ telles que :
  – pour tout $k \leqslant h$, la lettre x_k est de la forme $a_{r,f(k)}$ avec $r < f(k-1) < f(k)$,
  – pour tout $k < h$, le mot w_k ne contient pas de letter $a_{r,s}$ avec $q-1 < f(k) < s$,
  – la dernière lettre de w est $a_{q-1,n-1}$.

Échelle

- Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,
  et une suite $p = f(0) < f(1) < \ldots < f(h) = n-1$ telles que :
  – pour tout $k \leqslant h$, la lettre x_k est de la forme $a_{r,f(k)}$ avec $r < f(k-1) < f(k)$,
  – pour tout $k < h$, le mot w_k ne contient pas de letter $a_{r,s}$ avec $q-1 < f(k) < s$,
  – la dernière lettre de w est $a_{q-1,n-1}$.

- Proposition : Soit $(\beta_b, \ldots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement. Pour tout $b-1 \geqslant k \geqslant 3$, il existe p et q tels que la f.n.t de β_k est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

Échelle

- **Définition :** Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,
  et une suite $p = f(0) < f(1) < \ldots < f(h) = n-1$ telles que :
  – pour tout $k \leqslant h$, la lettre x_k est de la forme $a_{r,f(k)}$ avec $r < f(k-1) < f(k)$,
  – pour tout $k < h$, le mot w_k ne contient pas de letter $a_{r,s}$ avec $q-1 < f(k) < s$,
  – la dernière lettre de w est $a_{q-1,n-1}$.

- **Proposition :** Soit $(\beta_b, \ldots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement. Pour tout $b-1 \geqslant k \geqslant 3$, il existe p et q tels que la f.n.t de β_k est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

$\rightsquigarrow$ Pour $k \geqslant 3$, la tresse β_k est non triviale.

Échelle

• Définition : Un mot w est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$, s'il existe une décomposition $w = w_0\, x_1\, w_1 \ldots w_{h-1}\, x_h\, w_h$,
et une suite $p = f(0) < f(1) < \ldots < f(h) = n-1$ telles que :
– pour tout $k \leqslant h$, la lettre x_k est de la forme $a_{r,f(k)}$ avec $r < f(k-1) < f(k)$,
– pour tout $k < h$, le mot w_k ne contient pas de letter $a_{r,s}$ avec $q-1 < f(k) < s$,
– la dernière lettre de w est $a_{q-1,n-1}$.

• Proposition : Soit $(\beta_b, \ldots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement. Pour tout $b-1 \geqslant k \geqslant 3$, il existe p et q tels que la f.n.t de β_k est une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

$\rightsquigarrow$ Pour $k \geqslant 3$, la tresse β_k est non triviale.

$\rightsquigarrow$ Pour $k \geqslant 3$, la dernière lettre de la f.n.t de β_k est du type $a_{..,n-1}$.

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\ w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\ w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\ w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$
- Pour $k = b, \dots, 2$, on pousse le k-ème dangereux à gauche de w_{k-1} :

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\ w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$
- Pour $k = b, \dots, 2$, on pousse le k-ème dangereux à gauche de w_{k-1} :

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\ w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$
- Pour $k = b, \dots, 2$, on pousse le k-ème dangereux à gauche de w_{k-1} :

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- Proposition : Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\ w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$
- Pour $k = b, \dots, 2$, on pousse le k-ème dangereux à gauche de w_{k-1} :

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- **Proposition :** Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$
- Pour $k = b, \dots, 2$, on pousse le k-ème dangereux à gauche de w_{k-1} :

$$\begin{aligned}
&\phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_k) \cdot \delta_n^{-1} \cdot \phi_n(w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n)) \cdot \delta_n^{-1} \cdot \phi_n(\phi_n(\text{dang}_k) \cdot w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \phi_n(\phi_n(\text{dang}_k) \cdot w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_{k-1})
\end{aligned}$$

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- **Proposition :** Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$
- Pour $k = b, \dots, 2$, on pousse le k-ème dangereux à gauche de w_{k-1} :

$$\begin{aligned}
&\phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_k) \cdot \delta_n^{-1} \cdot \phi_n(w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n)) \cdot \delta_n^{-1} \cdot \phi_n(\phi_n(\text{dang}_k) \cdot w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \phi_n(\phi_n(\text{dang}_k) \cdot w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_{k-1})
\end{aligned}$$

- On obtient

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \dots \cdot \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_2) \cdot w_1$$

Cas du dénominateur peu négatif : $t \geqslant -b+2$

- **Proposition :** Soit w un mot de largeur b. Pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, le mot $\delta_n^t\, w$ est σ_{n-1}-positif ou de le forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$.

- Posons $w = \phi_n^{b-1}(w_b)\ \dots\ \phi_n(w_2)\ w_1$.
- On pousse $-b+2$ lettres δ_n^{-1} vers la droite pour obtenir

$$\delta_n^t w \equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(w_b)\ \delta_n^{-1}\ \dots\ \phi_n(w_2)\ \delta_n^{-1}\ w_1$$

- On a $w_b = \text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_b$
- Pour $k = b, \dots, 2$, on pousse le k-ème dangereux à gauche de w_{k-1} :

$$\begin{aligned}
&\phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_k) \cdot \delta_n^{-1} \cdot \phi_n(w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n)) \cdot \delta_n^{-1} \cdot \phi_n(\phi_n(\text{dang}_k) \cdot w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \phi_n(\phi_n(\text{dang}_k) \cdot w_{k-1}) \\
&\qquad \equiv \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_{k-1})
\end{aligned}$$

- On obtient

$$\begin{aligned}
\delta_n^t w &\equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \dots \cdot \phi_n(\text{non-neg} \cdot \phi_n^{-1}(\delta_n) \cdot \text{dang}_2) \cdot w_1 \\
&\equiv \delta_n^{t+b-2}\ \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \dots \cdot \phi_n(\text{non-neg}) \cdot \delta_n \cdot \phi_n(\text{dang}_2) \cdot w_1
\end{aligned}$$

Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

$$\xrightarrow{\quad a_{1,3} \quad}$$

Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

$$\xrightarrow{\quad a_{1,3} \quad}\xrightarrow{a_{1,3}}$$

Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

$$\xrightarrow{a_{1,3}} \quad \xrightarrow{a_{1,3}} \quad \xrightarrow{a_{2,4}}$$

Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

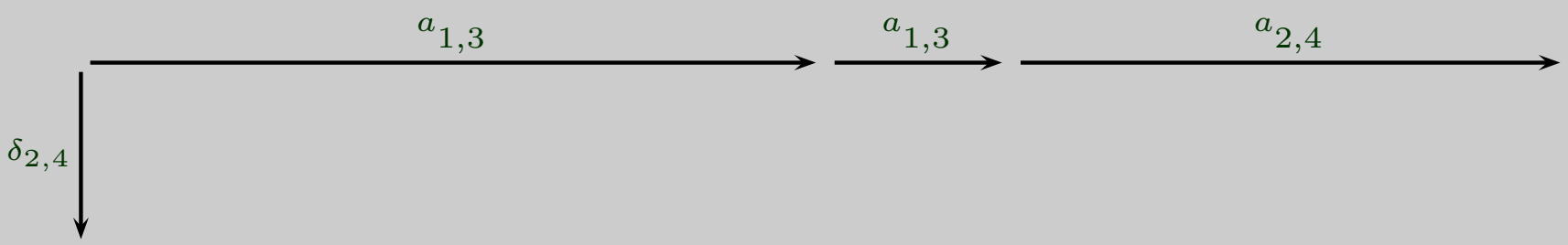


Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

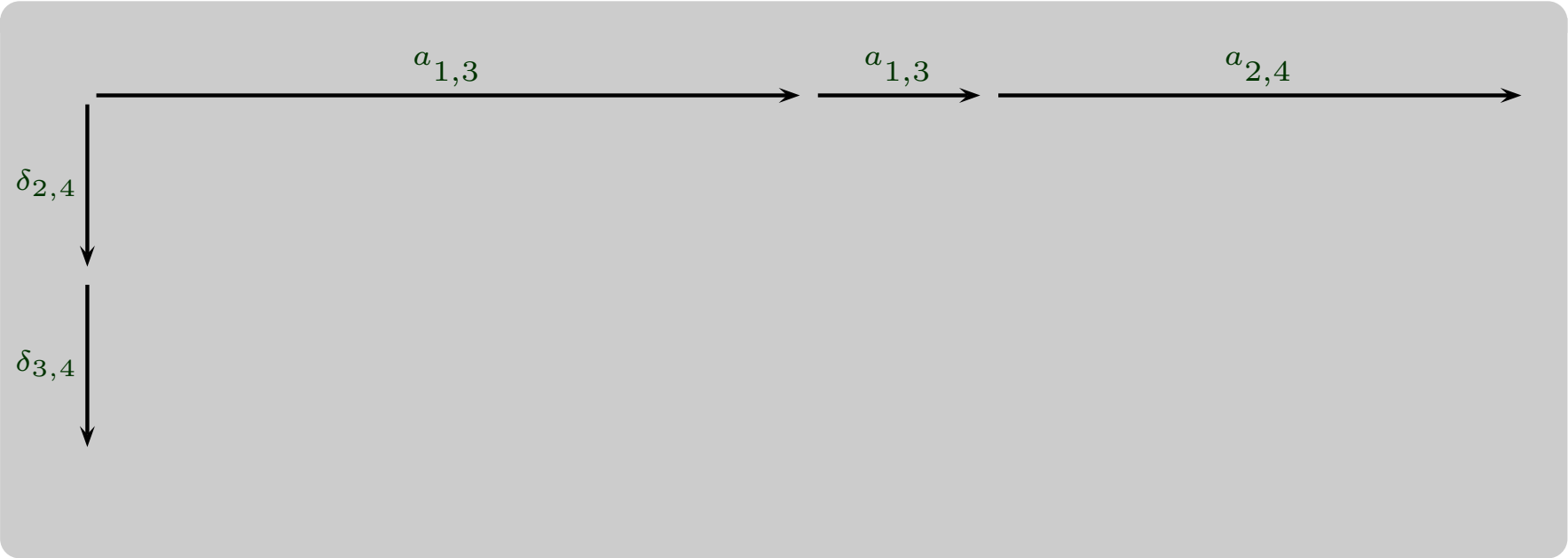


Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

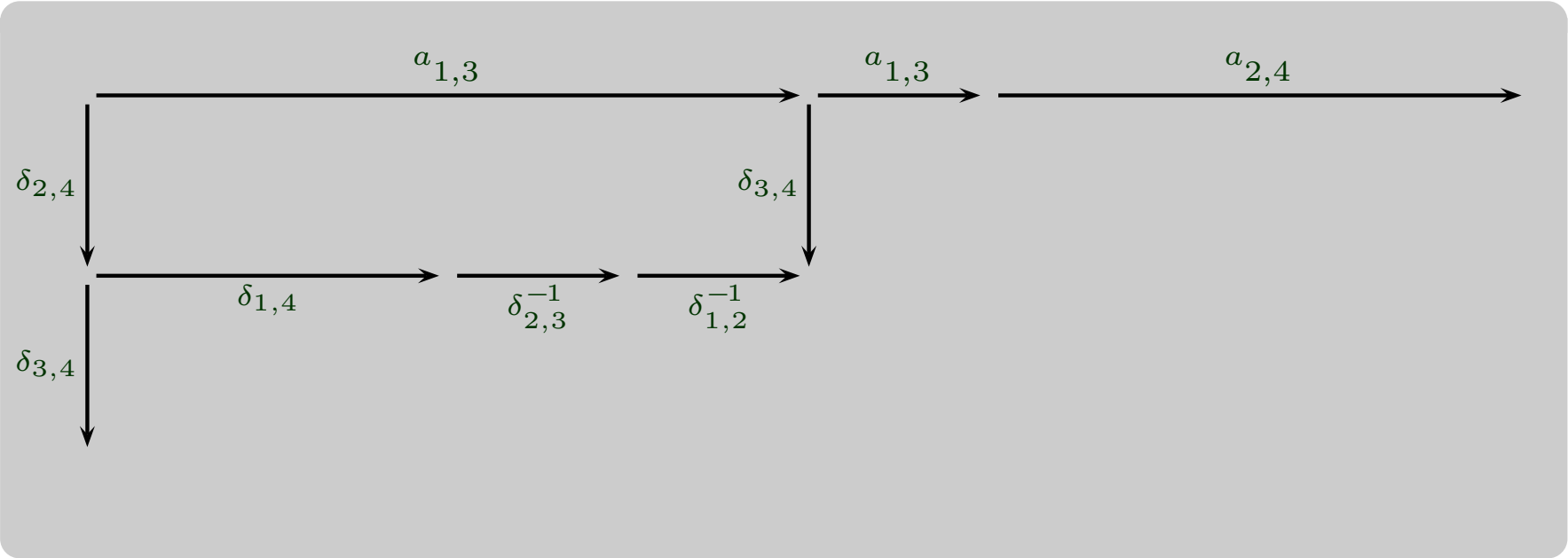


Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

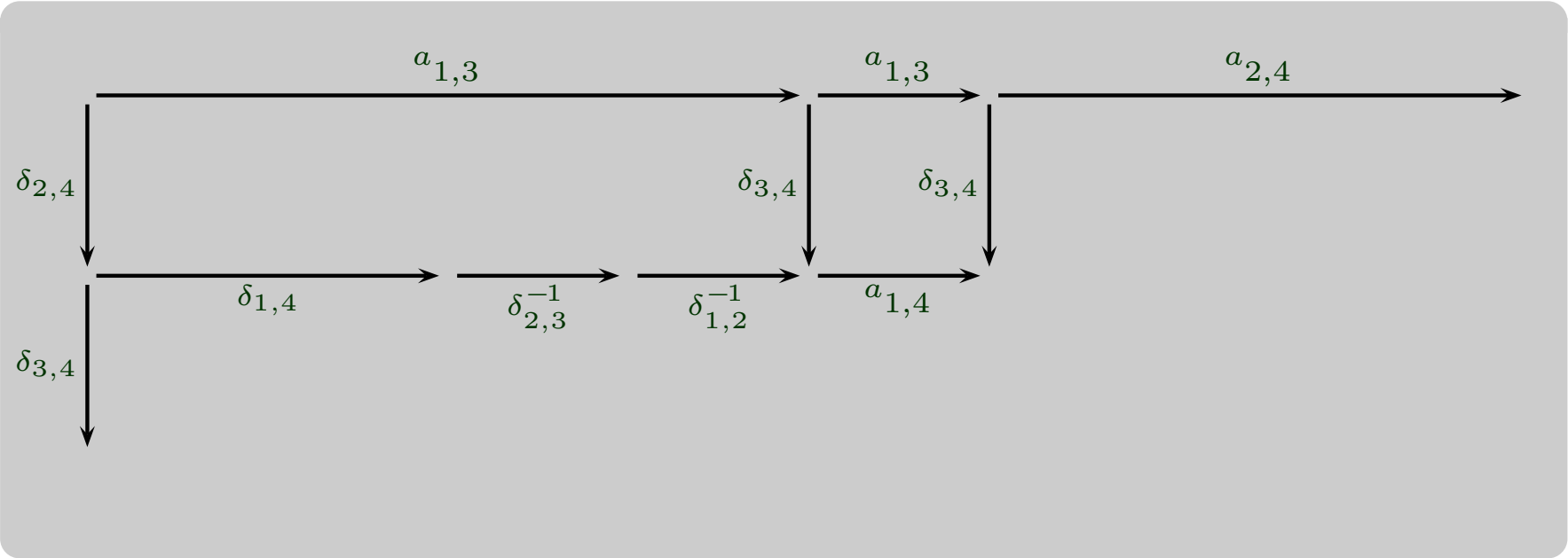


Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.

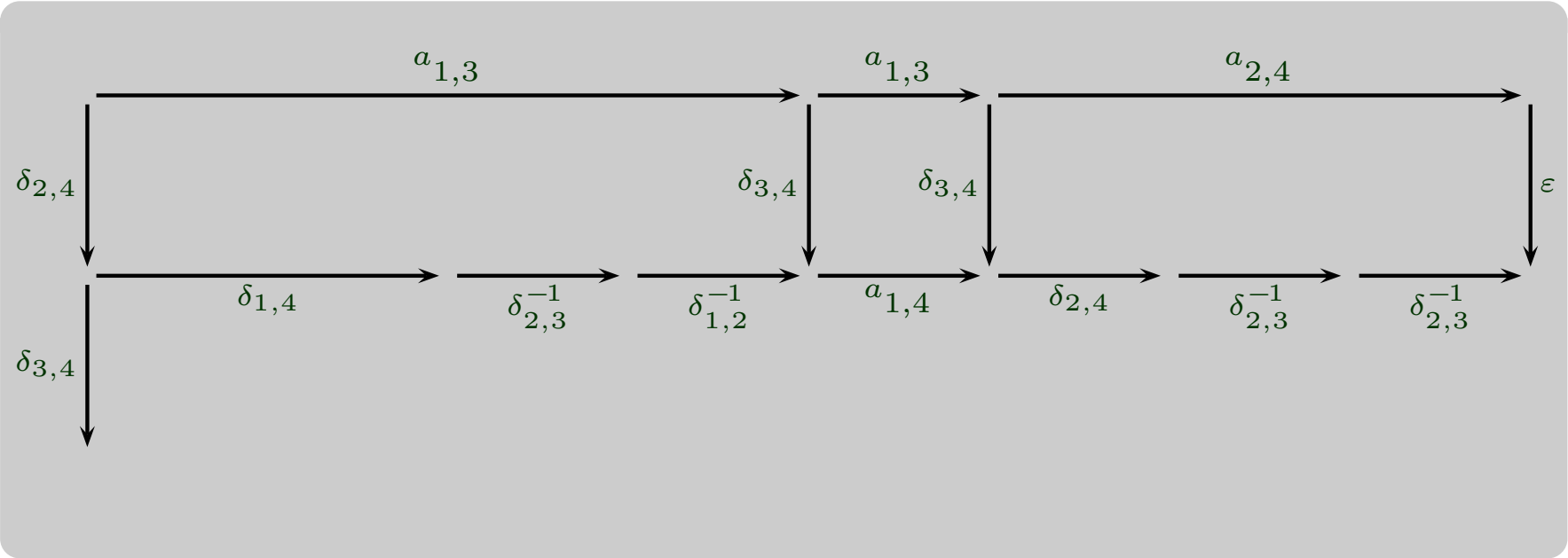
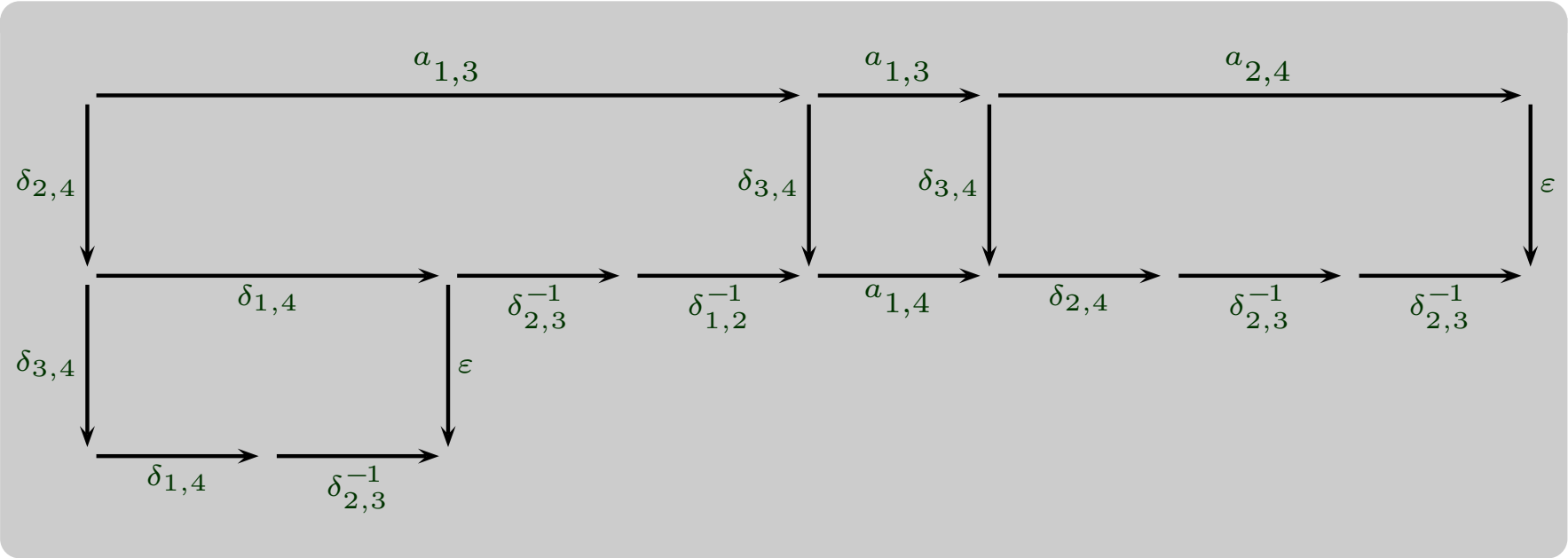


Diagramme de renversement

- Soit u un mot $a_{p,n}$-dangereux et w une $a_{p,n}$-échelle adossée à $a_{q-1,n-1}$.

- Question : Comment transformer $u\,w$ en $w'\,\delta_{q,n-1}\,v$ où v est un mot $a_{q-1,n-1}$-dangereux et w' un mot non σ_{n-1}-négatif ?

$\rightsquigarrow$ A l'aide de diagramme de renversement.



Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

– w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,

Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-positif ou de la forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$,

Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-positif ou de la forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$,
- $|w'| \leqslant 3\ell$.

Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-positif ou de la forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$,
- $|w'| \leqslant 3\ell$.

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $t < -b+2$, il existe w' satisfaisant :

Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-positif ou de la forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$,
- $|w'| \leqslant 3\ell$.

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $t < -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,

Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-positif ou de la forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$,
- $|w'| \leqslant 3\ell$.

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $t < -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-négatif,

Conclusion

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-positif ou de la forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$,
- $|w'| \leqslant 3\ell$.

• Proposition : Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $t < -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a, δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-négatif,
- $|w'| \leqslant \ell - t$.

Conclusion

• Proposition: Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $0 > t \geqslant -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a,δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-positif ou de la forme $\delta_{n-1}^t\, w_1$,
- $|w'| \leqslant 3\ell$.

• Proposition: Soit w un m.n.t de B_n^{+*} de largeur b et de longueur ℓ. Alors pour tout $t < -b+2$, il existe w' satisfaisant :

- w' est un a,δ-mot équivalent à $\delta_n^t\, w$,
- w' est σ_{n-1}-négatif,
- $|w'| \leqslant \ell - t$.

• Corollaire: Soit w un a-mot B_n^{+*} de longueur ℓ. Alors pour tout t, il existe un a,δ-mot σ-défini w' équivalent à $\delta_n^t\, w$ avec $|w'| \leqslant \max(\ell + |t|, 3\ell)$.

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.

$$-\ell \leqslant t \leqslant \ell \text{ et } |u| \leqslant \ell(n-2)$$

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.
  $-\ell \leqslant t \leqslant \ell$ et $|u| \leqslant \ell(n-2)$
- On calcule v la f.n.t de la tresse représentée par u.

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.
$$-\ell \leqslant t \leqslant \ell \text{ et } |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule v la f.n.t de la tresse représentée par u.
$$|v| = |u| \leqslant \ell(n-2)$$

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.
$$-\ell \leqslant t \leqslant \ell \text{ et } |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule v la f.n.t de la tresse représentée par u.
$$|v| = |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule w' le a, δ-mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, v$.

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.
$$-\ell \leqslant t \leqslant \ell \text{ et } |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule v la f.n.t de la tresse représentée par u.
$$|v| = |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule w' le a,δ-mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, v$.
$$|w'| \leqslant \max(|v|+|t|, 3|v|) \leqslant \max(\ell(n-1), 3\ell(n-2)) \leqslant 3\ell(n-1)$$

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.
$$-\ell \leqslant t \leqslant \ell \text{ et } |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule v la f.n.t de la tresse représentée par u.
$$|v| = |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule w' le a,δ-mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, v$.
$$|w'| \leqslant \max(|v|+|t|, 3|v|) \leqslant \max(\ell(n-1), 3\ell(n-2)) \leqslant 3\ell(n-1)$$
- On transcrit le a,δ-word w' en le mot de tresse σ-définit w''.

Conclusion (suite)

- Théorème: Tout mot de tresses w à n brins de longueur ℓ est équivalent à un mot σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\ell$.

- On calcule t et u vérifiant $w \equiv \delta_n^t\, u$.
$$-\ell \leqslant t \leqslant \ell \text{ et } |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule v la f.n.t de la tresse représentée par u.
$$|v| = |u| \leqslant \ell(n-2)$$
- On calcule w' le a,δ-mot σ-défini équivalent à $\delta_n^t\, v$.
$$|w'| \leqslant \max(|v|+|t|, 3|v|) \leqslant \max(\ell(n-1), 3\ell(n-2)) \leqslant 3\ell(n-1)$$
- On transcrit le a,δ-word w' en le mot de tresse σ-définit w''.
$$|w''| \leqslant (2n-3)|w'| \leqslant 6(n-1)\ell$$

Autres utilisations de la forme normale tournante

Autres utilisations de la forme normale tournante

- Solution du problème de mot en temps quadratique.

Autres utilisations de la forme normale tournante

- Solution du problème de mot en temps quadratique.

- Description de la restriction de $<$ sur B_n^{+*}

Autres utilisations de la forme normale tournante

- Solution du problème de mot en temps quadratique.

- Description de la restriction de $<$ sur B_n^{+*} : bon ordre de type $\omega^{\omega^{n-2}}$.

Autres utilisations de la forme normale tournante

- Solution du problème de mot en temps quadratique.

- Description de la restriction de $<$ sur B_n^{+*} : bon ordre de type $\omega^{\omega^{n-2}}$.

- Peut être, le problème de conjugaison (avec V. Gebhardt).

Merci !

- Chapitre 7 of P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest, Ordering Braids, Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., in press

- J. F., The cycling normal form on dual braid monoids, arXiv : math.GR/0712.3836.

- J. F., A well-ordering of dual braid monoids, Comptes rendus - Mathematique 346 (2008), pp. 729-734.

http://math.unicaen.fr/~jfroment