IUT Littoral | **2019 - 2020**
Info 2A | **Ana. Num. – C++**

TP 3 - Introduction aux méthodes de Runge–Kutta

Le but de ce TP est d'approcher numériquement les solutions d'équations différentielles de la forme
$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$
où $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ est une fonction inconnue, t est une variable parcourant $\mathbb{R}^+$, le vecteur y_0 de $\mathbb{R}^d$ est la condition initiale et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction connue dépendant du problème à étudier.

Nous rappelons que pour tout intervalle I, une fonction $g : I \to \mathbb{R}^d$ est donnée par
$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_d(t) \end{bmatrix} \quad \text{pour } t \in I,$$
où $g_1, \ldots, g_d$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. De plus si g est dérivable sur I alors nous avons
$$g'(t) = \begin{bmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_d'(t) \end{bmatrix} \quad \text{pour } t \in I.$$

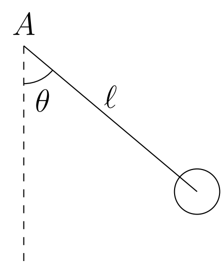
1. Premiers exemples

Exercice 1. On considère l'équation différentielle $y'(t) = 2\,y(t)$ vérifiant $y(0) = 1$.

a. Que valent d, y_0 et f pour cette équation différentielle ?

b. Trouver mathématiquement une solution à cette équation différentielle.

Exercice 2. On considère un pendule oscillant de masse m accroché en A à l'aide d'une tige de longueur ℓ. On note θ l'angle que forme la tige du pendule avec la verticale.



On suppose qu'à l'instant $t = 0$, l'angle θ vaut $\pi/8$. L'angle $\theta(t)$ satisfait alors l'équation différentielle :
$$\theta''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) \quad \text{avec} \quad \theta(0) = \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad \theta'(0) = 0,$$
où $g = 9.81$ m.s^{-2} est la constante d'accélération gravitationnelle. On pose $\omega = \theta'$. L'équation précédente devient alors :
$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta(0) = \frac{\pi}{8} \\ \omega(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

a. Quels sont les inconnus de (2) ? En déduire une interprétation de $y(t)$ vue en (1).

b. Quelles sont les valeurs de d, y_0 et f pour cette équation différentielle ?

Contrairement à l'exercice précédent, cette équation différentielle n'admet pas de solution explicite.

2. Méthodes de Runge–Kutta

Ces méthodes ne donneront pas la fonction y solution de (1) mais donneront des valeurs approchée de $y(t)$ pour certaines valeurs de t. Commençons par fixé un réél strictement positif h supposé petit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = n \times h$. Nous souhaitons alors obtenir une valeur approchée a_n de $y(t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Supposons $n \in \mathbb{N}$

a. Calculer l'intégrale de $y'(t)$ sur $[t_n, t_{n+1}]$ en fonction de $y(t_n)$ et $y(t_{n+1})$.

b. En déduire une relation de récurrence entre $y(t_n)$ et $y(t_{n+1})$.

Le calcul de $y(t_{n+1})$ à partir de $y(t_n)$ revient donc à déterminer une certaine intégrale. Grâce aux méthodes de quadrature nous pouvons obtenir une valeur approchée de cette intégrale.

Exercice 4. La méthode de Runge-Kutta d'orde 1 repose sur l'appoximation suivante

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \approx (b-a) \times g(a).$$

a. Réécrire cette approximation dans le contexte qui nous intéresse.

b. En déduire une formule de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. La méthode de Runge-Kutta d'orde 2 repose sur l'appoximation suivante

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \approx (b-a) \times g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

a. Réécrire cette approximation dans le contexte qui nous intéresse.

Il nous reste a établir une valeur approchée pour $y(t_n + h/2)$.

b. Donner une valeur approchée de $y(t_n + h/2)$ en vous inspirant de la méthode de Runge–Kutta d'ordre 1.

c. En déduire une formule de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.

a. Appliquer la méthode Runge–Kutta d'ordre 1 aux équations différentielles de l'exercice **1** et **2**.

b. De même pour la méthode de Runge–Kutta d'ordre 2.