

Tices – Examen (Session 2)

Exercice 1. Le but de cet exercice est de créer un algorithme permettant d'approcher une intégrale à l'aide de la méthode de Simpson. Pour cet exercice, f désigne une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ de \mathbb{R} .

1. Soit c et $h > 0$ deux réels tels que $c, c+h \in I$. Déterminer en fonction de f , c et h les coefficients de la parabole P passant par les points de coordonnées $(c, f(c))$, $(c+h/2, f(c+h/2))$ et $(c+h, f(c+h))$.
2. Calculer l'aire de la zone délimitée par l'arc de parabole P , les deux droites verticales d'équations $x = c$ et $x = c+h$ et l'axe des abscisses en fonction des coefficients obtenus à la question précédente.
3. Ecrire un algorithme AlgoBox qui étant donnée une fonction $f(x)$, les réels a et b et un entier n , donne une approximation de $\int_a^b f(x) dx$ à l'aide d'un découpage uniforme en n bande de $[a, b]$.

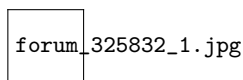
Exercice 2. Le but de cet exercice est l'étude de la suite définie par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+3} = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$.

1. Calculer les 30 premiers termes de la suite u_n .
2. Représenter les valeurs obtenues par un graphique.
3. Calculer le rapport $v_n = u_{n+1}/u_n$ pour $n = 0, \dots, 29$.
4. Créer un graphique représentant la suite (v_n) pour $n = 0 \dots 29$.
5. Que pouvez-vous conjecturer ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur
$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}.$$

6. Que vaut U_2 ?
7. Déterminer la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A \times U_n$.
8. Déterminer U_n en fonction de A et de U_1 .
9. Calculer, à l'aide de Xcas, les valeurs propres de A .
10. A est-elle diagonalisable ?
11. Déterminer une matrice P inversible P et une matrice diagonale D tel qu'on ait $A = PDP^{-1}$.
12. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Donner une expression de u_n ne dépendant que de n pour $n \in \mathbb{N}$.
14. Vérifier la formule obtenue à l'aide du tableur pour les 30 premières valeurs de u_n .

Exercice 3. On considère le graphe suivant orienté pondéré suivant :



1. Donner un majorant et un minorant du nombre chromatique de ce graphe.
2. Déterminer le plus court chemin entre E et S .

Exercice 4. Dans cet exercice on utilise GéoGebra pour résoudre une partie du problème 2 du Capes Interne de 2005. Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit p un réel strictement positif, on désigne par F le point de coordonnées $(0; p/2)$ et D la droite d'équation $y = -p/2$.

1. Créer un curseur permettant de faire varier p entre 1 et 10. Tracer F et D
2. Tracer en bleu la courbe d'équation $y = -1/(2p)x^2$, on note P la parabole obtenue.
3. Pour A un point de la courbe vérifier que la distance entre A et D est la même qu'entre A et F .
4. Tracer la projeté orthogonale H de A sur D et le segment $[F, H]$
5. Tracer la tangente T de P en A et S le point d'intersection de T avec D .
6. Tracer les droites (FA) et (FS) .
7. Soient B et C deux points distincts de la parabole P . Tracer les tangentes en A et B à P et Q leur point d'intersection.
8. Tracer I le milieu de $[BC]$; E le point d'intersection de (IQ) et P
9. Tracer les points α et β milieu du $[AQ]$ et $[BQ]$; la droite Δ qui passe par α et β . Constaté que Δ est tangente à P .
10. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les tangentes à P passant par un point N extérieur à la parabole.
11. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les points d'intersections de P avec une droite horizontale Δ .
12. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les points d'intersections de P avec une droite verticale Δ .
13. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les points d'intersections de P avec une droite non horizontale et non verticale Δ .