Université du Littoral **2014-2015**
Master 1 ère année **MEEF**

Tices – Examen (Session 2)

Exercice 1. Le but de cet exercice est de créer un algorithme permettant d'approcher une intégrale à l'aide de la méthode de Simpson. Pour cet exercice, f désigne une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.

1. Soit c et $h > 0$ deux réels tels que $c, c + h \in I$. Déterminer en fonction de f, c et h les coefficients de la parabole P passant par les points de coordonnées $(c, f(c))$, $(c + h/2, f(c + h/2))$ et $(c + h, f(c + h))$.

2. Calculer l'aire de la zone délimitée par l'arc de parabole P, les deux droites verticales d'équations $x = c$ et $x = c + h$ et l'axe des abscisses en fonction des coefficients obtenus à la question précédente.

3. Ecrire un algorithme AlgoBox qui étant donnée une fonction $f(x)$, les réels a et b et un entier n, donne une approximation de $\int_a^b f(x)\underset{\cdot}{x}$ à l'aide d'un découpage uniforme en n bande de $[a, b]$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est l'étude de la suite définie par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+3} = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$.

1. Calculer les 30 premiers termes de la suite u_n.

2. Représenter les valeurs obtenues par un graphique.

3. Calculer le rapport $v_n = u_{n+1}/u_n$ pour $n = 0, ..., 29$.

4. Créer un graphique représentant la suite (v_n) pour $n = 0...29$.

5. Que pouvez-vous conjecturer ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur $\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$.

6. Que vaut U_2 ?

7. Déterminer la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A \times U_n$.

8. Déterminer U_n en fonction de A et de U_1.

9. Calculer, à l'aide de `Xcas`, les valeurs propres de A.

10. A est-elle diagonalisable ?

11. Déterminer une matrice P inversible P et une matrice diagonale D tel qu'on ait $A = PDP^{-1}$.

12. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. Donner une expression de u_n ne dépendant que de n pour $n \in \mathbb{N}$.

14. Vérifier la formule obtenue à l'aide du tableur pour les 30 premières valeurs de u_n.

Exercice 3. On considère le graphe suivant orienté pondéré suivant :

forum_325832_1.jpg

1. Donner un majorant et un minorant du nombre chromatique de ce graphe.

2. Déterminer le plus court chemin entre E et S.

Exercice 4. Dans cet exercice on utilise GéoGebra pour résoudre une partie du problème 2 du Capes Interne de 2005. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ Soit p un réel strictement positif, on désigne par F le point de coordonnées $(0; p/2)$ et D la droite d'équation $y = -p/2$.

1. Créer un curseur permettant de faire varier p entre 1 et 10. Tracer F et D

2. Tracer en bleu la courbe d'équation $y = -1/(2p)x^2$, on note P la parabole obtenue.

3. Pour A un point de la courbe vérifier que la distance entre A et D est la même qu'entre A et F.

4. Tracer le projeté orthogonale H de A sur D et le segment $[F, H]$

5. Tracer la tangente T de P en A et S le point d'intersection de T avec D.

6. Tracer les droites (FA) et (FS).

7. Soient B et C deux points distincts de la parabole P. Tracer les tangentes en A et B à P et Q leur point d'intersection.

8. Tracer I le milieu de $[BC]$; E le point d'intersection de (IQ) et P

9. Tracer les points α et β milieu du $[AQ]$ et $[BQ]$; la droite Δ qui passe par α et β. Constater que Δ est tangente à P.

10. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les tangentes à P passant par un point N extérieur à la parabole.

11. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les points d'intersections de P avec une droite horizontale Δ.

12. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les points d'intersections de P avec une droite verticale Δ.

13. Sur une autre feuille GéoGebra, illustrer comment construire les points d'intersections de P avec une droite non horizontale et non verticale Δ.