Tices – Examen

Exercice 1 (4 points)**.** Le but de cet exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$ et $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} - 6u_{n-3}$.

1. Calculer les 20 premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur $\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$.

2. Déterminer la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A \times U_n$.

3. Déterminer U_n en fonction de A et de U_2.

4. Calculer, à l'aide de `Xcas`, les valeurs propres de A.

5. Déterminer une matrice P inversible P et une matrice diagonale D tel qu'on ait $A = PDP^{-1}$.

6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Donner une expression de u_n ne dépendant que de n pour $n \in \mathbb{N}$.

8. Vérifier la formule obtenue à l'aide du tableur pour les 20 premières valeurs de u_n.

Exercice 2 (4 points)**.** Pour cet exercice vous devez utiliser GeoGebra.

1. Créer un triangle équilatéral ABC avec $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ et tel que C soit au dessus de la droite des abscisses.

2. Placer un point D sur le segment AC. Créer un point E sur le segment BC tel que $||\vec{AD}|| = ||\vec{CE}||$.

3. Créer la droite (DE) en bleu avec une épaisseur de trait valant 1. Activer la trace de (DE). Que constatez vous lorsque vous déplacez D le long du segment $[AC]$.

4. Conjecturer la construction géométrique (utilisant seulement le triangle) d'une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le sommet de la parabole. Tester votre conjecture.

5. En déduire une possible équation pour la parabole. Créer une parabole avec l'équation trouvée.

6. Construire deux droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par l'intérieur du triangle. Créer deux rayons rouge portés par ces droites venant du bas et s'arrêtant sur la parabole.

7. Construire en rouge le reflet de ces deux rayons après avoir touché la parabole. Créer F le point d'intersection des reflets. Le point F est le foyer de la parabole.

8. Quel point particulier du triangle F semble t-il être ?

Exercice 3 (3 points)**.** Créer des procédures `GeoTortue`

1. Permettant de tracer un rectangle de côtés a et b donnés.

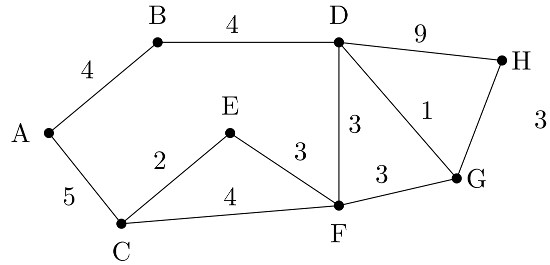
2. Permettant de dessiner un quadrillage $n \times n$ avec une maille de taille a, les entier n et a seront des paramètres.

Exercice 4 (4 points)**.** Le but de cet exercice est l'utilisation du crible d'Eratosthène.

1. A l'aide du crible d'Eratosthène, déterminer sur papier la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 20

2. Créer une fonction Python `eratosthene(n)` retournant la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. La fonction devra utiliser le crible d'Eratosthène.

Exercice 5 (3 points)**.** On considère le graphe G suivant :

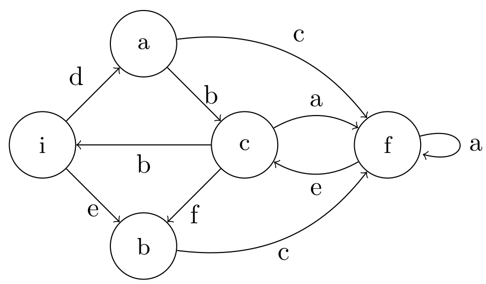


1. Le graphe G possède t-il une chaîne eulérienne ? Si oui en donnez une, si non justifier.

2. Le graphe G possède t-il un cycle eulérien ? Si oui en donnez une, si non justifier.

3. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin allant de A à H. Vous donnerez les différentes étapes de l'algorithme.

Exercice 6 (2 points)**.** Le digicode d'une porte d'entrée d'un immeuble est régi par l'automate suivant :



Un code est accepté si en partant du sommet i, l'automate arrive au sommet f.

1. Parmi les codes `dbba`, `dbbec`, `efa`, `eceaa`, `dcaaefcebdc`, lesquels sont acceptés.

2. Combien de codes de longueur 8 ce digicode accepte-t-il ? (On pourra utiliser `Xcas`).

Exercice 7 (3 points)**.** Estimation de π par une méthode de Monte-Carlo.

Dans un carré de $ABCD$ de côté 1 on trace le quart de cercle $\mathcal{C}$ centré en A et de rayon 1.

1. Quelle est la surface du quart de disque ?

2. Comment obtenir une approximation de π à l'aide d'une simulation de tire de fléchettes sur le carré $ABCD$?

3. Imaginer une activité TICE permettant d'obtenir une approximation de π.