Université du Littoral **2018-2019**
Master 1 ère année **MEEF**

Tices – Examen

Exercice 1 (5 points)**.** Le but de cet exercice est de calculer une valeur approchée de π à l'aide de la formule de Machin. On rappel que la le développement en série entière de la fonction arctangent est

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Soit $\alpha \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arctan(\alpha)$.

1. A l'aide de `Xcas` et de la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

calculer successivement $\tan(2\theta)$, $\tan(4\theta)$ et $\tan(4\theta - \pi/4)$.

2. Que vaut $\tan(4\theta - \pi/4)$ pour $\theta = \arctan(1/5)$?

3. En déduire la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

4. Ecrire une fonction `artcan` en `Python` qui étant donnée $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ retourne

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

valeur approché de $\arctan(x)$.

5. En déduire une fonction `approx` en `Python` retournant une valeur approché de π. Cet algorithme prendra en paramètre un entier n correspondant aux nombres de termes calculés dans les séries entières de arctan.

Exercice 2 (4 points)**.** Le but de cet exercice est l'étude de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$,$u_2 = 3$ et $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} + -2u_n$.

1. Calculer les 30 premiers termes de la suite u_n avec un tableur.

2. Représenter les valeurs obtenues par un graphique.

3. Calculer le rapport $v_n = u_{n+1}/u_n$ pour $n = 0, ..., 29$.

4. Créer un graphique représentant la suite (v_n) pour $n = 0, ..., 29$.

5. Que pouvez-vous conjecturer ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur $\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$.

6. Que vaut U_2 ?

7. Déterminer la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A \times U_n$.

8. Déterminer U_n en fonction de A et de U_2.

9. Calculer, à l'aide de `Xcas`, les valeurs propres de A.

10. A est-elle diagonalisable ?

11. Déterminer une matrice P inversible et une matrice diagonale D tel qu'on ait $A = PDP^{-1}$.

12. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. Donner une expression de u_n ne dépendant que de n pour $n \in \mathbb{N}$.

14. Vérifier la formule obtenue à l'aide du tableur pour les 30 premières valeurs de u_n.

Exercice 3 (4 points)**.** Pour cet exercice vous devez utiliser `GeoGebra`.

1. Créer les points A, B et C de corrdonées respectives $(-2,0)$, $(2,0)$ et $(0,2)$.

2. Placer un point D sur la droite AB. Dessiner le segment $[C,D]$ en bleu.

3. Dessiner en noir la droite d perpendiculaire à $[AB]$ passant par D et la médiatrice à $[CD]$. On note M leur point d'intersection.

4. Dessiner M en rouge et activer sa trace.

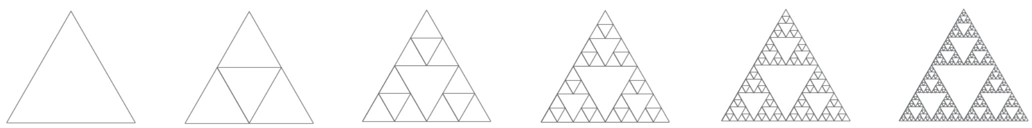
5. Que semble décrire le point M lorsque D parcours la droite (AB).

6. On note x la distance entre les points O et D. Donner une equation de la médiatrice à $[CD]$ en fonction de x.

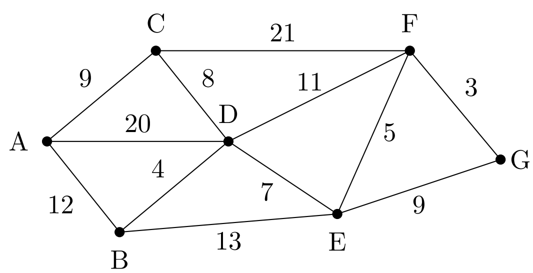
7. Déterminer la distance DM en fonction de x.

8. Tracer la courbe qui à x associe DM.

Exercice 4 (4 points)**.** En `Scratch` écrire un algorithme permettant de tracer le Triangle de Sierpińky d'arrête l et de degré d. Voici le rendu pout les degrés 0, 1, 2, 3, 4 et 5 et $l = 200$.



Exercice 5 (3 points)**.** On considère le graphe G suivant :



1. Le graphe G possède t-il une chaîne eulérienne ? Si oui en donnez une, si non justifier.

2. Le graphe G possède t-il un cycle eulérien ? Si oui en donnez une, si non justifier.

3. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin allant de A à G. Vous donnerez les différentes étapes de l'algorithme.