ULCO **2018 – 2019**
M1 Recherche **Algèbre**

Algèbre – Examen

Documents interdits

Durée : 3h

Exercice 1 (2 points)**.** Calculer le dixième polynôme cyclotomique $\Phi_{10,\mathbb{Q}}$.

Exercice 2 (3 points)**.** Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et a, b deux éléments de K^*. Montrer qu'on a $K(\sqrt{a}) = K(\sqrt{b})$ si et seulement si b/a est un carré dans K.

Exercice 3 (3 points)**.**

a. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $Q = X^2 + 3X + 1$.

Soit α une racine dans $\mathbb{R}$ du polynôme $P = X^6 + 3X^3 + 1$.

b. Montrer que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. En déduire que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ est divisible par 2.

c. Montrer que $\beta = \alpha + 1/\alpha$ est racine de $X^3 - 3X + 3$. En déduire que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ est divisible par 3.

d. Calculer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et en déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 (7 points)**.** On pose $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

a. Déterminer $[K : \mathbb{Q}]$.

b. On pose $\alpha = \sqrt{2} + i$.

- **i.** Calculer α^{-1} puis montrer que i et $\sqrt{2}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}(\alpha)$.
- **ii.** En déduire $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

c. Montrer que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

d. Décrire avec leurs ordres les éléments du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

e. Donner la liste des sous-extensions de $K/\mathbb{Q}$ ainsi que les sous-groupes de G associés.

f. Quel est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 5 (5 points)**.** Le but de cet exercice est de trouver un générateur de $\mathbb{F}_{25}^*$ ainsi que son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_5$.

a. Montrer que $X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.

Posons $K = \mathbb{F}_5[X]/(X^2 - 2)$ et $\alpha = \overline{X} \in K$.

b. Montrer que K est un corps d'ordre 25 et trouver l'ordre de α dans K^*.

c. Montrer que les éléments d'ordre 3 dans K^* sont les racines du polynômes $P = X^2 + X + 1$.

d. Exprimer les racines de P dans K sous la forme $a + b\alpha$ (avec $a, b \in \mathbb{F}_5$).

e. Trouver un générateur de K^* ainsi que son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_5$.