ULCO **2019 – 2020**
M1 Recherche **Algèbre**

Algèbre – Examen

Calculatrices interdites
Documents interdites

Documents interdits

Durée : 3h

Exercice 1 (2 points)**.** Calculer le douzième polynôme cyclotomique $\Phi_{12,\mathbb{Q}}$.

Exercice 2 (2 points)**.** Soient K un corps et a, b deux éléments de K tels que $[K(a) : K] = m$ et $[K(b) : K] = n$ où m et n sont des entiers premiers entre eux. On pose $L = K(a, b)$.

a. Donner un majorant de $[L : K(a)]$ puis de $[L : K]$.

b. Déterminer le degré de $[L : K]$.

Exercice 3 (2 points)**.** Soient K un corps et a un élément algébrique sur K tels que $[K(a) : K]$ soit impair.

a. Montrer que $b = a^2$ est algébrique sur K et établir $[K(a) : K(b)] \leq 2$.

b. En déduire $K(b) = K(a)$.

Exercice 4 (4 points)**.** Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

a. Montrer $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. En déduire le degré de $K/\mathbb{Q}$.

b. Montrer $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. On pourra considérer $\alpha^3 - 9\alpha$.

c. Quel est le polynôme minimal $P = \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ de α sur $\mathbb{Q}$?

d. Quel est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Et sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?

Exercice 5 (3 points)**.** Le but de cet exercice est de trouver un générateur de $\mathbb{F}_9^*$.

a. Montrer que $X^2 - X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$.

Posons $K = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 - X - 1)$ et $\alpha = \overline{X} \in K$.

b. Montrer que K est un corps d'ordre 9

c. Déterminer l'ordre de α dans K^*.

d. Conclure.

Exercice 6 (7 points)**.** Posons $P = X^3 - 2$ et soit α une racine réélle de P. Notons $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

a. Quel est le degré de l'extension $K/\mathbb{Q}$?

b. Déterminer en fonction de α les deux autres racines de P dans $\mathbb{C}$.

c. L'extension $K/\mathbb{Q}$ est-elle normale ? Justifier.

d. Déterminer les $\mathbb{Q}$-isomorphismes de K dans $\mathbb{C}$.

e. On pose $L = K(j)$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

  i. Déterminer $Q = \mathrm{Irr}(j, \mathbb{Q})$.

  ii. Établir $\mathrm{Irr}(j, K) = Q$ puis $[L : \mathbb{Q}] = 6$.

f. Montrer que l'extension $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

g. Décrire avec leurs ordres les éléments du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

h. Montrer que G est non-commutatif. À quel groupe bien connu G est-il isomorphe ?