**ULCO** **2019 – 2020**
**M1 Recherche** **Algèbre**

# TD 4 – Extensions normales et séparables

**Exercice 1.** Montrer que toute extension quadratique est normale.

**Exercice 2.** Soit $d \in \mathbb{Q}^* \setminus (\mathbb{Q}^*)^2$. On note $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\theta = a + b\sqrt{d} \in K^* \setminus (K^*)^2$ où $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ et $L = K(\sqrt{\theta})$. On suppose que ces trois corps sont inclus dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ de $\mathbb{Q}$.

**a.** Construire tous les $\mathbb{Q}$-isomorphismes de $L$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

**b.** Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est une extension normale si et seulement si $a^2 - db^2 \in (K^*)^2$.

**c.** Déterminer $\mathbb{Q}^* \cap (K^*)^2$.

**d.** On suppose $a^2 - db^2 = x^2$, $x \in \mathbb{Q}^*$.

**i.** Montrer que tous les automorphismes de $L$ sont d'ordre $1$ ou $2$.

**ii.** Montrer que $L$ contient d'autre sous-corps quadratiques que $K$.

**e.** On suppose $a^2 - db^2 = dx^2$, $x \in \mathbb{Q}^*$. Montrer qu'il existe un $\mathbb{Q}$-automorphisme de $L$ d'ordre $4$.

**f.** Appliquer ce qui précède avec $d = 2$ et $\theta = 2 - \sqrt{2}$.

**g.** Si $L/\mathbb{Q}$ n'est pas normale, quelle est la plus petite extension normale $M$ qui la contient et que vaut $[M : \mathbb{Q}]$.

**Exercice 3.**

**a.** Soit $P = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, montrez que $P$ est irréductible.

**b.** Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, montrez que $L$ contient une extension quadratique $K$ de $\mathbb{Q}$.

**c.** Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, construire les $\mathbb{Q}$-isomorphismes de $L$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

**d.** Montrer que le corps de décomposition $N$ de $P$ sur $\mathbb{Q}$ est une extension de degré $8$ et qu'il contient une extension normale de degré $4$.

**e.** Construire les prolongements à $N$ des $\mathbb{Q}$-isomorphismes de $L$ dans $N$.

**Exercice 4.** Soit $p$ un nombre premier et $K$ un corps fini de caractéristique $p$.

**a.** Montrer que l'application $F$ définie par $F(x) = x^p$ est un automorphisme de $K$.

**b.** Monter que si $K = \mathbb{F}_p$ alors $F$ est l'identité.

**Exercice 5.** Soit $p$ un nombre premier et $n > 0$ un entier.

**a.** Soit $L/\mathbb{F}_p$ une extension de corps de degré $n$. Déterminer le cardinal de $L$.

**b.** Montrer que s'il existe un corps à $p^n$ éléments alors c'est le corps de décompostion d'un polynôme $P$ que l'on déterminera

**c.** En déduire que s'il existe ce corps est unique à isomorphisme près.

**d.** Soit $\Omega$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et $M$ l'ensemble des racines de $P$. Montrer que $M$ est un corps à $p^n$ élements contenant $\mathbb{F}_p$.

**Exercice 6.**

**a.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

**i.** Montrer que pour tout diviseur $d$ de $n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a exactement un sous groupe d'ordre $d$.

**ii.** Montrer qu'on a $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

**b.** Soit $K$ un corps finis à $q$ éléments. On pose $n = q - 1$.

**i.** Soit $d$ un diviseur de $n$. Montrer que le nombre $N(d)$ d'éléments d'ordre $d$ dans $K^*$ est $0$ ou $\varphi(d)$.

**ii.** En déduire que $K^*$ est un groupe cyclique d'ordre $n$.

**c.** Plus généralement montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

**Exercice 7.** Soit $K$ un corps de caractéristique $p \neq 0$ et $L/K$ une extension finie. Montrer qu'il existe $\alpha \in L$ tel qu'on ait $L = K(\alpha)$.

**Exercice 8.** Montrer que si $K$ est de caractéristique $2$, $d \in K^*/(K^*)^2$ et $L = K(\sqrt{d})$ alors l'identité est le seul isomorphisme de $L$ dans une clôture algébrique de $\Omega$.