EILCO **2015-2016**
CP1 **MAT11**

I. Etude de fonctions (2)

Exercice 1. Soit tan la fonction définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. La fonction tan est-elle périodique ? paire ? impaire ?

2. Donner le domaine de définition de tan. Sur quel intervalle étudier tan ?

3. Tracer la courbe représentative de tan sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

4. Montrer que tan est une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

On note arctan la fonction réciproque de tan.

5. Tracer la courbe représentative de arctan sur $\mathbb{R}$.

6. Déterminer la dérivée de arctan.

Exercice 2. On pose $f = \cos$ et $I = [0, \pi]$.

1. Montrer que la fonction f est une bijection de I sur $[-1, 1]$.

2. Tracer la courbe de f l'intervalle I.

3. Tracer la courbe représentative de f^{-1} sur $[-1, 1]$.

4. Quelle est la dérivée de f^{-1}.

5. Recommencer l'exercice pour $f = \sin$ et $I = [-\pi, \pi]$.

La fonction réciproque de cos est arccos et celle de sin est arcsin.

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 4. Simplifier $a^{\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}}$ pour $a > 1$.

Exercice 5. Résoudre $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ et $2^{x^3} = 3^{x^2}$.

Exercice 6. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définiton et de dérivabilité de g.

2. Calculer la dérivée de g.

3. Que pouvez-vous dire de g sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$?

Exercice 7. On définit les deux fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Démontrer que pour tout réel x on a $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

2. Etudier les variations des fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$ admet une fonction réciproque, que l'on note argch de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

On veut démontrer la relation suivante :

$$\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{pour } x > 1.$$

4. Exprimer $\mathrm{sh}(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$.

5. Vérifier l'égalité $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$.

6. En déduire la relation.

7. Calculer la dérivée de la fonction argch.

8. Retrouver le résultat précédent à l'aide du théorème de dérivation d'un fonction réciproque.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur D_f par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.

2. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f.

3. Calculer la dérivée de f.

4. En déduire le tableau de variation de f.

5. Tracer la courbe représentatice de f.