EILCO **2015-2016**
CP1 **MAT11**

II. Intégration

Exercice 1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ **2.** $\displaystyle\int_{-12}^{12} x^2e^x dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^3 2x^2e^{\frac{x}{3}} dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^y (x^2-x)\ln(x)dx$ **5.** $\displaystyle\int_0^y 2x^2\cos(x)dx$

Exercice 2. Déterminer une primitive de $f(x) = \ln(x)$. On pourra écrire

$$f(x) = 1 \times \ln(x) = u'(x)v(x)$$

puis utiliser l'intégration par parties. Employer la même pour calculer une primitive de $g(x) = \arctan(x)$.

Exercice 3. Pout $y \in \mathbb{R}$, on dénote $I(y)$ l'intégrale $\int_0^y \cos(x)\sin(x)dx$. A l'aide d'une intégration par partie déterminer une equation satisfaite par I. En déduire une valeur de I.

Exercice 4. A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{2t-3}dt$ avec $u = 2t-3$;

2. $\displaystyle\int_0^y \frac{3t}{t^2+5}dt$ avec $u = t^2+5$;

3. $\displaystyle\int_1^y \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$ avec $u = \sqrt{1+t}$ (on pourra utiliser $\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$.) ;

4. $\displaystyle\int_0^y \frac{2dt}{e^t+e^{-t}}$ avec $u = e^t$ (utiliser l'identité $\frac{u^2}{u^2+1} = 1 - \frac{1}{u^2+1}$) ;

5. $\displaystyle\int_9^y \ln\left(\sqrt{t}-1\right) dt$ avec $u = \sqrt{t}$;

6. $\displaystyle\int_1^y \frac{\ln(t)dt}{t+t(\ln t)^2}dt$ avec $u = \ln t$;

7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ avec $u = \sin(t)$;

8. $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt$ avec $u = \sin(t)$;

Exercice 5. Déterminer des nombres réels a et b tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:

$$f(x) = \frac{(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

En déduire une primitive de la fonction $f(x)$.

Exercice 6. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2}.$$

En déduire une primitive de la fonction f.

Exercice 7. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} =$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

En déduire une primitive de f.

Exercice 8. Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{t^2 - t - 12}$ **2.** $\dfrac{1}{t^2 + 5t + 6}$ **3.** $\dfrac{1}{t^2 + 5t + 6}$ **4.** $\dfrac{1}{4t^2 - 4t - 3}$ **5.** $\dfrac{1}{t^2 + t + 1}$

Exercice 9. L'objectif de cet exercice est d'approcher la valeur de $\ln(1 + a)$ par un polynôme de 5 pour $a \in [0, +\infty[$. Pour $a \in [0, +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt \quad \text{et} \quad I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt.$$

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.

2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer la relation :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

Soit P le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$

4. Calculer $I_2(a), I_3(a), I_4(a)$ et en déduire l'égalité suivante :

$$I_5(a) = \ln(1 + a) - P(a).$$

5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculer $J(a)$.

6. Démontrer que pour tout $t \in [0, a]$: $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

7. Démonter que pour tout $a \in [0, +\infty[$: $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

8. En déduire que pour tout $a \in [0, +\infty[$: $|\ln(1 + a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

9. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1 + a)$ à 10^{-3} près.