III. Trigonométrie

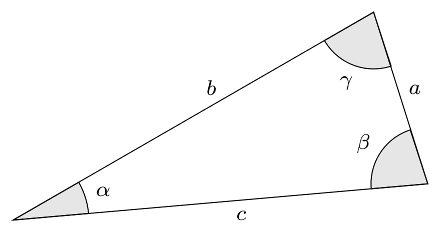
Exercice 1.

1. A partir de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et en utilisant les forumes de duplication, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Vérifier la relation $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$. En utilisant les formules d'addition, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 2. On donne $\sin(x) = -\frac{3}{4}$ avec $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Calculer les valeurs exactes de $\cos(x)$, $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

Exercice 3. Pour chacune des questions suivantes, calculer les angles et les distances manquantes à partir des angles et des distances donnés.



1. $\gamma = 25.79°$, $a = 151.49\,\mathrm{m}$ et $b = 212.28\,\mathrm{m}$.

2. $a = 151.46\,\mathrm{m}$, $b = 212.28\,\mathrm{m}$ et $\gamma = 88.68°$.

3. $b = 154.46\,\mathrm{m}$, $\alpha = 40.34°$ et $\gamma = 30.91°$.

Exercice 4. On reprend la figure géométrique de l'exrecice précédent. Le but de cet exercice est de démonter la formule de Héron qui permet de calculer l'aire S du triangle ABC uniquement en focntion des longueurs a, b et c.

1. En utilisant la formukle d'Al-Kashi, exprimes $\cos^2(\alpha)$ en fonction de a, b et c.

2. En déduire l'égalité suivante :

$$\sin^2(\alpha) = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

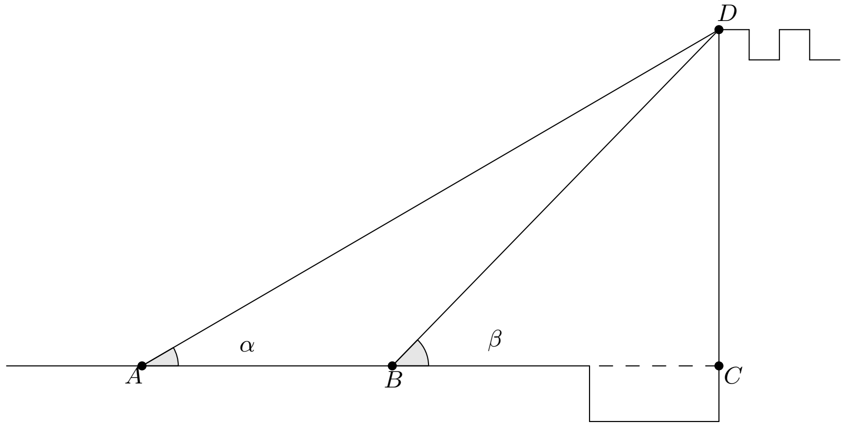
3. On note $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre de ABC. Démontrer l'égalité suivante :

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

4. En déduire la formule suivante :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exercice 5. On souhaite déteminer la hauteur d'un bâtiment dont la base (le point C) est inaccessible, A l'aide d'un théodoliten on mesure les deux angles α et β ainsi que la longueur $L = AB$.



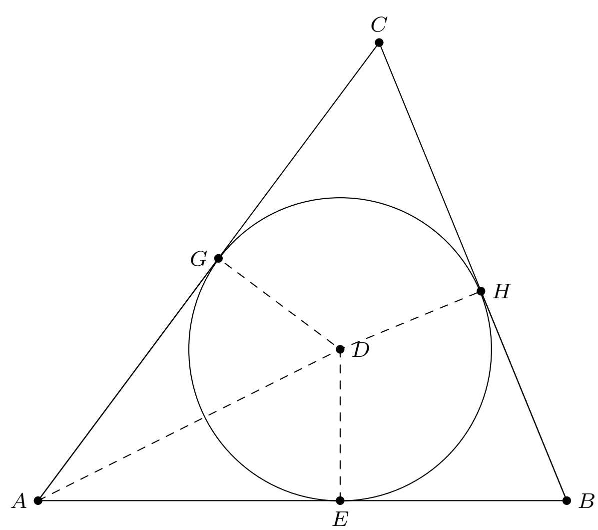
1. Calculer la hauteur $h = CD$ du bâtiment en fonction des valeurs α, β et L.

2. On a mesuré les valeurs suivantes :

$$\alpha = 30.23°, \quad \beta = 45.83° \quad \text{et} \quad AB = 10\text{m}.$$

En déduire la hauteur du bâtiment à 10^{-1} m près.

Exercice 6. La figure ci-après représente un triangle ABC, avec $A(0;0)$, $B(14;0)$ ainsi que le cercle de centre $D(8;4)$, inscrit au triangle ABC. On note α l'angle opposé au côté BC, de même pour β et γ.



1. Calculer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

3. De la même manière, calculer $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$.

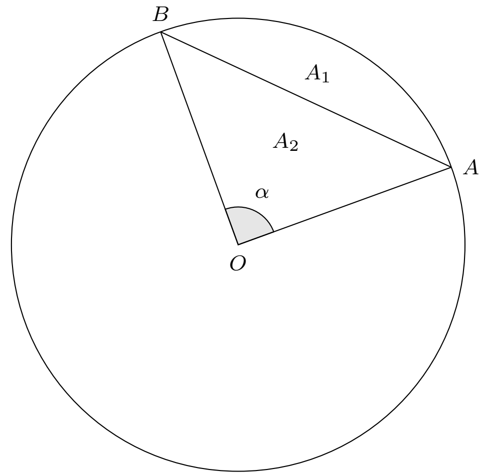
4. Démontrer les égalités suivantes :

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha + \beta) \quad \text{et} \quad \sin(\gamma) = \sin(\alpha + \beta).$$

En déduire les valeurs exactes de $\cos(\gamma)$ et $\sin(\gamma)$.

5. Calculer alors des valeurs exactes des longueurs CA et CB.

Exercice 7. On cherche à déterminer la valeur de l'angle α dans l'intervalle $]0:\pi[$ telle que l'aire A_1 de de la partie du disque de centre O soit égale à la l'aire A_2 du triangle.



1. Montrer que cela revient à chercher la valeur du réel α dans $]0;\pi]$ tel que $f(x)=0$ où $f(x)=\sin(x)-\dfrac{x}{2}$.
2. Etudier les variations de f.
3. En déduire le nombre de solutions au problème posé et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 8. Deux astronomes veulent effectuer une mesure précise de la distance Terre-Lune. Le premier se place à Berlin en Allemagne et le second se place au cap de Bonne-Espérence en Affrique du Sud. Chacun de leur côté, ils mesurent, au même moment, l'angle formé entre la direction du zénith (le point à la verticale de leur position) et celle du centre de la Lune. L'astronome en Allemagne trouve $\alpha = 53.3°$ et celui en Affrique du Sud $\beta = 34.5°$.

On donne les données complémentaires suvantes :
- Rayon terrestre $R = 6378\,\text{km}$;
- Latitude de Berlin $53°30'N$;
- Latitude du cap de Bonne-Espérence : $33°55'S$.

La latitude astronomique est l'angle que fait la verticale du lieu avec le plan équatorial. On suppose que les deux villes sont situées sur le même méridien.

1. Faire un dessin. On note A le point correspondant à Berlin, B celui du cap de Bonne-Espérence, O le centre de la Terre, L le centre de la Lune et γ l'angle effectué entre le centre de la Terre et les deux villes.
2. Calculer l'angle γ (on gardera toutes les décimales en mémoires pour les calculs suivants).
3. Calculer la distance AB arrondi au km.
4. Calculer les distances AL et BL arrondies au km.
5. Calculer la distance OL du centre de la Terre au centre de la Lune arrondie au km.