EILCO **2015-2016**
CP1 **MAT11**

IV. Nombres complexes

Exercice 1. Ecrire sous forme algébrique les expressions suivantes :

a. $\dfrac{4+i}{2-3i}$, **b.** $\dfrac{1-i}{1+i}$, **c.** $\dfrac{1-i}{2}-\dfrac{2}{(1-i)^2}$, **d.** $(1-i)^4$, **e.** $\dfrac{3+2i}{5-i}+\dfrac{1+i}{i}$, **f.** $\dfrac{5+i}{5-i}$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $2iz+4=-3z+i$, **b.** $z+2\overline{z}=3-4i$, **c.** $2iz=1-z$, **d.** $4iz+2i=1-z+i$,

e. $\dfrac{z}{i-1}-i=\dfrac{z}{1+i}+i$, **f.** $z=2\overline{z}$, **g.** $\overline{z}=iz$, **h.** $z\overline{z}=z+2$, **i.** $\overline{z}-1=z\overline{z}-i$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $z^2-\overline{z}$ soit réel.

Exercice 4. Déterminer le forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$\mathbf{a}=1-i\sqrt{3},\quad \mathbf{b}=7-7i,\quad \mathbf{c}=-\sqrt{3}+i,\quad \mathbf{d}=3\sqrt{2}+i\sqrt{6},\quad \mathbf{e}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations :

a. $z^2=i$, **b.** $z^2=3+4i$, **c.** $z^2=8-6i$, **d.** $z^2+z+1=0$, **e.** $z^2-(1+2i)z+i-1=0$,
f. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$, **g.** $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$, **h.** $z^2-(1+2i)z-3+11i=0$.

Exercice 6.

1. Développer l'expression $(a+b)^4$.
2. En utilisant la formule d'Euler, linéariser l'expression $4\cos(x)^4+4\sin(x)^4$.

Exercice 7. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et on considère la fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définit par :

$$f(z)=\frac{z+1}{z-i}.$$

1. Calculer $f(1+i)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=2+i$.
3. Calculer $\mathrm{Re}(f(z))$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
4. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pure.
5. Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.

Exercice 8. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et on considère la fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définit par $f(z)=z^2+1$.

1. Déterminer les antécédents du point O.
2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes.
3. Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image par f.
4. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
5. Soit A le point d'affixe $z_A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par f puis prouver que les points O, A et A' sont alignés.

Exercice 9.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixes z tels que :

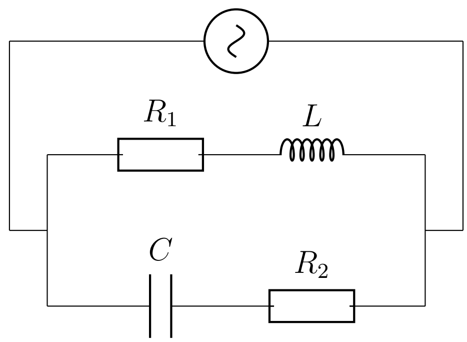
$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}.$$

2. Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixes z tels que :

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

3. Déterminer l'ensemble E_3, intersection de E_1 et E_2.

Exercice 10. On considère le montage suivant :



alimenté par une tension alternative sinusoïdale de fréquence $f = 50\text{Hz}$ et de valeur efficace $U = 250V$. Ce montage comporte :

— deux résistances de valeurs $R_1 = 100\Omega$ et $R_2 = 150\Omega$;
— une bobine d'inductance pure $L = 0,24\text{H}$;
— un condensateur de capacité $C = 16\mu\text{F}$.

On rappel que l'impédance permet une généralisation de la loi d'Ohm à un circuit soumis à une tension alternative. L'impédance est exprimé par un nombre complexe dont la partie réel est la resistance et la partie imaginaire est la réactance. En électricité le nombre complexe i est noté j. On note $\omega = 2\pi f$ la pulsation et on rappelle les expressions des impédances :

— impédance de la bobine : $Z = jL\omega$;
— impédance du condensateur : $Z = \dfrac{1}{jC\omega} = -\dfrac{j}{C\omega}$.

Déterminer l'expression complexe puis le module et l'argument des grandeurs suivantes :

1. L'impédance de chacune des branches du montage.

2. Le courant dans chacune des branches du montage.

3. La tension aux bornes de chacun des dipôles constituant le circuit.

4. Le courant total.

5. L'impédance équivalente à l'ensemble du montage.