EILCO **2015-2016**
CP1 **MAT11**

Outils mathématiques pour l'ingénieur

Correction devoir

Exercice 1 (2 points)**.**

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

2. Soit on se souvient de la formule ou bien on la retrouve facilement :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(a)(\tan(a)\cos(b)+\sin(b))}{\cos(a)(\cos(b)-\tan(a)\sin(b)}$$
$$= \frac{\tan(a)\cos(b)+\sin(b)}{\cos(b)-\tan(a)\sin(b)} = \frac{\cos(b)(\tan(a)+\tan(b))}{\cos(b)(1-\tan(a)\tan(b))} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

Exercice 2 (2 points)**.**

1. Le domaine est celui de ln, soit $]0,+\infty[$. On pose $P(x) = x^2 - x - 6$ pour obtenir

$$\ln(x)^2 - \ln(x) = 6 \Leftrightarrow \ln(x)^2 - \ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow P(\ln(x)) = 0.$$

On cherche les racines de P. On a $\Delta = 1^2 - 4\times(-6) = 25$ les racines sont donc

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

On a donc $\ln(x)^2 - \ln(x) = 6$ ssi $\ln(x) = -2$ ou $\ln(x) = 3$ et donc ssi $x = e^{-2}$ ou $x = e^3$. Les solutions sont donc $\{e^{-2}, e^3\}$.

2. On a $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ et $2x + 11 > 0 \Leftrightarrow x \in]-5.5,+\infty[$. Le domaine de définition est donc

$$D = \big(]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\big)\cap]-5.5,+\infty[=]-5.5,-2[\cup]2,+\infty[.$$

On a $\ln(x^2-4) = \ln(2x+11) \leftrightarrow x^2-4 = 2x+11 \leftrightarrow x^2-2x-15 = 0$. Posons $Q(x) = x^2-2x-15$. On a $\Delta = 2^2 - 4\times(-15) = 64$ et les racines de $Q(x)$ sont

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{2-8}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Les solutions sont donc $\{-3, 5\}$.

Exercice 3 (6 points)**.**

1. On pose $u'(x) = (x^2 - x)$ et $v(x) = \ln(x)$. On a donc $u(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Une intégration par parties donne alors :

$$\int_1^e (x^2-x)\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{e}{3}-\frac{e^2}{2}\right) - \int_1^e \frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \left(\frac{e}{3}-\frac{e^2}{2}\right) - \left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$
$$= \frac{e}{3}-\frac{e^2}{2}-\frac{e^3}{9}+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4} = \frac{2e^3}{9}-\frac{e^2}{4}-\frac{5}{36}.$$

2. On pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \cos(x)$. On a $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \sin(x)$. Une première intégration par parties donne :

$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\mathrm{d}x = \left[x^2\sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\cos(x)\mathrm{d}x = -2\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x.$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$. On a donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$. Une deuxième intégration par parties donne :

$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\mathrm{d}x = -2\left([-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\mathrm{d}x\right) = -2\left((\pi-0)+\int_0^\pi \cos(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$= -2\pi - 2\int_0^\pi \cos(x)\mathrm{d}x = -2\pi - 2\left[\sin(x)\right]_0^\pi = -2\pi$$

3. On a $\varphi'(x) = 2x$ et donc

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_5^6 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = [2\sqrt{(x)}]_5^6 = 2(\sqrt{6}-\sqrt{5}).$$

4. On a $\varphi'(x) = 2\dfrac{\ln(x)}{x}$ et donc

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(1+\ln(x)^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^e \varphi'(x)\frac{1}{\varphi(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\varphi(1)}^{\varphi(e)} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln(x)\right]_1^2 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 4 (5 points)**.**

1. On a $\Delta = 5^2 - 4\times(-6) = 49$. Les racines de P sont donc

$$t_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2} = \frac{-5-7}{2} = -6 \text{ et } t_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2} = \frac{-5+7}{2} = 1.$$

2. On a

$$\frac{a}{t+6} + \frac{b}{t-1} = \frac{a(t-1)+b(t-6)}{P(t)} = \frac{(a+b)t-a+6b}{P(t)}.$$

Par identification on obtient le système

$$\begin{cases} a+b & =0 \\ -a+6b & =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & =-b \\ -(-b)+6b & =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & =-b \\ 7b & =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & =-b \\ b & =\dfrac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & =-\dfrac{1}{7} \\ b & =\dfrac{1}{7} \end{cases}.$$

3. On calcule

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1}{P(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\int_0^x -\frac{1}{t+6}+\frac{1}{t-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\big[-\ln|t+6] + \ln|t-1|\big]_0^x \\ &= \frac{1}{7}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+6}\right|\right]_0^x = \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+6}\right| - \ln\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+6}\right| + \ln(6)\right) = \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{6(x-1)}{x+6}\right|\right). \end{aligned}$$

4. Le discriminant de t^2+2t+3 est $\Delta = 4-4\times 3 = -8 < 0$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+3}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Exercice 5 (3 points)**.**

1. Dans le triangle ABC, on a

$\widehat{ACB} = 180° - \widehat{CAB} - \widehat{ABC} = 180° - \widehat{CAD} - \widehat{DAB} - \widehat{ABC} = 180° - 24.95° - 85.30° - 39.68° = 30.07°.$

Pour $\widehat{ABD}$, on calcule $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = 39.68° + 18.09° = 57.77°$.

Dans le triangle ABD, on a $\widehat{ADB} = 180° - \widehat{DAB} - \widehat{ABD} = 180° - 85.30° - 57.77° = 36.93°$.

2. Dans le triangle ABC, on a

$$\frac{AC}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)},$$

et donc

$$AC = \frac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)} \times AB = \frac{\sin(39.68°)}{\sin(30.07°)} \times 700\,\mathrm{m} \approx 892.012\,\mathrm{m}.$$

Dans le triangle ABD, on a

$$\frac{AD}{\sin\left(\widehat{ABD}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{ADB}\right)},$$

et donc

$$AD = \frac{\sin\left(\widehat{ABD}\right)}{\sin\left(\widehat{ADB}\right)} \times AB = \frac{\sin(57.77°)}{\sin(36.93°)} \times 700\,\mathrm{m} \approx 985.521\,\mathrm{m}.$$

3. En utilisant Al-Kashi dans le triangle ACD, on obtient

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2 \times AC \times AD \times \cos\left(\widehat{CAD}\right)} \\ &\approx \sqrt{892.012^2 + 985.521^2 - 2 \times 892.012 \times 985.521 \times \cos(24.95°)} \\ &\approx 415.7\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Exercice 6 (6 points)**.**

1. On a $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$.

2. Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc le domaine de th est $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\mathrm{sh}(x)$. On obtient alors $\mathrm{th}(-x) = \dfrac{\mathrm{ch}(-x)}{\mathrm{sh}(-x)} = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{-\mathrm{sh}(x)} = -\mathrm{th}(x)$. La fonction th est donc impaire.

4. On vérifie

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)) \times (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)) = \left(\frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2}\right) \times \left(\frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{2e^{-x}}{2} \times \frac{2e^x}{2} = e^{-x}e^x = 1. \end{aligned}$$

5. En utilisant la dérivée d'un quotient, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{th}'(x) &= \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)' = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}. \end{aligned}$$

6. On a $\mathrm{ch}(x)^2 > 0$ et donc $\mathrm{th}'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$, la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $y = \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On obtient alors

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{1 + \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{\dfrac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\dfrac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{\dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}}}{\dfrac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{2e^x}{2e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}.$$

On a donc $2x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ puis $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$. On a donc $\mathrm{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout x$\in]-1, 1[$.

8. On a $\mathrm{argth}(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$. Comme $\ln(1-x)$ et $\ln(1+x)$ sont dérivables sur $]-1, 1[$ il en est de même de argth. On a

$$\mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}.$$