EILCO **2015-2016**
CP1 **MAT11**

Outils mathématiques pour l'ingénieur – Devoir

Durée : 1h30

Calculatrice autorisée
Documents interdits

Exercice 1 (2 points)**.** Soient a et b deux réels.

1. Exprimer $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction de $\sin(a), \sin(b), \cos(a)$ et $\cos(b)$.

2. Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$.

Exercice 2 (2 points)**.** Donner l'ensemble de définition puis résoudre les équations

1. $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 6$,

2. $\ln(x^2-4) = \ln(2x+11)$.

Exercice 3 (4 points)**.** A l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales :

1. $\displaystyle\int_1^e (x^2-x)\ln(x)\mathrm{d}x$,

2. $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(x)\mathrm{d}x$.

A l'aide du changement de variable indiqué calculer les intégrales :

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\mathrm{d}x$ avec $\varphi(x) = x^2+5$,

4. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(1+\ln(x)^2)}\mathrm{d}x$ avec $\varphi(x) = 1+\ln(x)^2$.

Exercice 4 (4 points)**.** On considère le polynôme $P(t) = t^2+5t-6$.

1. Calculer les racines t_1 et t_2 de P.

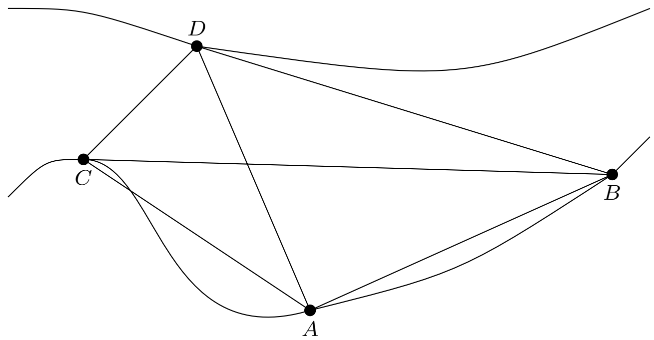
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{a}{(t-t_1)} + \frac{b}{(t-t_2)}.$$

3. Calculer la primitive $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{P(t)}\mathrm{d}t$.

4. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+3}\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (3 points)**.** La figure ci-dessous représente le bras d'un fleuve. Dans le cadre d'un projet de construction d'un pont métallique, un géomètre souhaite mesurer la distance entre les points C et D. Il se place d'un côté du fleuve et effectue des mesures d'angles et de distance.



Il obtient ainsi : $\widehat{CAD} = 24.95°, \widehat{DAB} = 85.30°, \widehat{ABC} = 39.68°, \widehat{CBD} = 18.09°$ ainsi que la distance $AB = 700$m. Le but de cet exercice est de calculer la distance CD.

1. Déterminer en degré, la mesure des angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ADB}$.

2. En déduire la mesure des distances AC et AD à 10^{-3} m près.

3. Calculer la distance CD à 10^{-1} m près (on pourra utiliser la formule d'Al-Kashi).

Exercice 6 (6 points)**.** On rappel que les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Calculer les dérivées des fonctions ch et sh.

On définit la fonction th par $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

2. Quel est le domaine de définition de la fonction th.

3. La fonction th est elle paire, impaire ? (justifier)

4. Démontrer que pout tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2 = 1$.

5. Montrer que la dérivée de la fonction th est

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

Un calcul de limite donne $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$.

6. Justifier que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un $]-1, 1[$. On note argth la bijection réciproque de la fonction th.

7. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\text{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (On pourra poser $y = \text{th}(x)$ et montrer $\frac{1+y}{1-y} = e^{2x}$).

8. Justifier que argth est dérivable sur I et préciser sa dérivée.