Outils mathématiques pour l'ingénieur – Correction examen

Exercice 1.

1. $\dfrac{3+6\mathbf{i}}{3-4\mathbf{i}} = \dfrac{(3+6\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})}{9+16} = \dfrac{9+18\mathbf{i}+12\mathbf{i}-24}{15} = \dfrac{-15+30\mathbf{i}}{25} = -\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}\mathbf{i}.$

2. $\left(\dfrac{2-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^2 = \dfrac{(2-\mathbf{i})^2}{(1+\mathbf{i})^2} = \dfrac{4-4\mathbf{i}-1}{1-2\mathbf{i}-1} = \dfrac{3-4\mathbf{i}}{2\mathbf{i}} = \dfrac{3\mathbf{i}+4}{-2} = -2-\dfrac{3}{2}\mathbf{i}.$

3. $\dfrac{2+5\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} + \dfrac{2-5\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{(2+5\mathbf{i})(1+\mathbf{i})}{1+1} + \dfrac{(2-5\mathbf{i})(1-\mathbf{i})}{1+1} = \dfrac{(2+2\mathbf{i}+5\mathbf{i}-5)+(2-2\mathbf{i}-5\mathbf{i}-5)}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3.$

Exercice 2.

1. $\displaystyle\int_0^\pi 3\sin(x)+\frac{x^2}{2}\,dx = \left[-3\cos(x)+\frac{x^3}{6}\right]_0^\pi = -3\cos(\pi)+\frac{\pi^3}{6}-(-3\cos(0)+\frac{0}{3}) = 3+\frac{\pi^3}{6}-(-3) = 6+\frac{\pi^3}{6}.$

2. On pose $u=x$, $v'=e^{2x}$. On a donc $u'=1$ et $v=\frac{1}{2}e^2x$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x}\,dx &= \int_0^1 u\,v'\,dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'\,v\,dx = \left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^2x\,dx = \left(\frac{1}{2}e^2-0\right) - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)e^2+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

3. On a $\varphi'(x)=3x^2$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\,dx = \frac{1}{3}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{(x)}}\,dx\\ &= \frac{2}{3}\int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x}\right]_1^9 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9}-\sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}(3-1) = \frac{2}{3}\times 2 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 3. D'après la relation de Pythagore généralisée, on a $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$ et donc $-2bc\cos(\alpha) = a^2-b^2-c^2$ puis $\cos(\alpha)=\dfrac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}$. En remplaçant a, b et c par leurs valeurs, on obtient :

$$\cos(\alpha) = \frac{6^2-4^2-5^2}{-2\times 4\times 5} = \frac{36-16-25}{-40} = \frac{-5}{-40} = \frac{1}{8}.$$

A l'aide de la calculatrice, on calcule $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\approx 82.82°$. Par la formule des sinus, on a $\dfrac{a}{\sin(\alpha)}=\dfrac{b}{\sin(\beta)}$ et donc $\dfrac{\sin(\alpha)}{a}=\dfrac{\sin(\beta)}{b}$ puis $\sin(\beta)=\dfrac{b\sin(\alpha)}{a}$. En remplaçant a, b et α par leur valeur, on obtient :

$$\sin(\beta) = \frac{4\times\sin(82.82°)}{6} \approx 0.661439 \quad \text{puis} \quad \beta = \sin^{-1}(0.661439)\approx 41.41°.$$

De $\alpha+\beta+\gamma=180°$, on obtient $\gamma = 180°-\alpha-\beta \approx 180°-82.82°-41.41° = 55.77°$.

Exercice 4.

1. $(E_H) : y'(t)-2\,y(t)=0$.

2. L'équation (E_H) est de la forme $y'(t)+a(t)\,y(t)=0$ avec $a(t)=2t$. La solution générale est donc $y_y(t)=\lambda\,e^{-A(t)}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ quelconque et A est un primitive de a. La fonction $A(t)=t^2$ convient. La solution générale de (E_H) est donc $y_h(t)=\lambda\,e^{-t^2}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ quelconque.

3. On recherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(t)=\lambda(t)\,e^{t^2}$. On a $y_p'(t)=\lambda'(t)\,e^{t^2}+\lambda(t)\,2t\,e^{t^2}$. En remplaçant y par y_p dans (E), on obtient :

$$\lambda'(t)\,e^{t^2}+\lambda(t)\,2t\,e^{t^2}-2t\,\lambda(t)/,e^{t^2} = 3t\,e^{t^2},$$

qui est équivalent à $\lambda'(t)\,e^{t^2}=3t\,e^{t^2}$ et donc, après divisions par e^{t^2}, à $\lambda'(t)=3t$. En prenant $\lambda(t)=\frac{3}{2}t^2$, on obtient la solution particulière $y_p(t)=\frac{3}{2}t^2\,e^{t^2}$ de (E)

4. La solution générale de (E) est $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=\lambda\,e^{t^2}+\frac{3}{2}t^2\,e^{t^2}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ quelconque.

5. On a les équivalences suivantes :

$$y(1)=0 \Leftrightarrow \lambda\,e^{1^2}+\frac{3}{2}\times 1^1\times e^{1^2}=0 \Leftrightarrow \lambda\,e+\frac{3}{2}\times e=0 \Leftrightarrow \lambda+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow = \lambda=-\frac{3}{2}.$$

La solution de (E) vérifiant $y(1)=0$ est donc $y(t)=-\frac{3}{2}\,e^{t^2}+\frac{3}{2}t^2\,e^{t^2}=\frac{3}{2}\,e^{t^2}\left(t^2-1\right)$.

Exercice 5.

1. L'équation caractéristique est $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2. On calcule les racines de l'équation caractéristique. On a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$. Les racines sont donc $r = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ et $s = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$. La solution générale de l'équation est donc $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec λ et μ des réels quelconques.

3. On calcule $y'(t) = (\lambda e^t + \mu e^{2t})' = \lambda e^t + 2\mu e^{2t}$. On a alors

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\mu + \mu = 1 \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mu = 1 \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

La solution de l'équation vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est donc $y(t) = 2e^t - e^{2t}$.

4. L'équation caractéristiques est $x^2 - 2x + 1 = 0$, qui est équivalent à $(x-1)^2 = 0$. La racine 1 étant double, la solution générale de l'équation est $y(t) = \lambda e^t + \mu t e^t$ avec λ et μ deux réels quelconques. On calcule $y'(t) = \lambda e^t + \mu t e^t + \mu e^t$. On a alors

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

La solution de l'équation vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est donc $y(t) = e^t - te^t = (1-t)e^t$.

Exercice 6.

1. L'équation possède exactement 2 solutions.

2. On a $(x + \mathbf{i}y)^2 = (x^2 + 2x\mathbf{i}y + (\mathbf{i}y)^2) = x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy$.

3. L'équation $(x + \mathbf{i}y)^2 = -5 + 4\mathbf{i}$ est équivalente au système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2\mathbf{i}xy = 4\mathbf{i} \end{cases}$$

4. Après division par $2\mathbf{i}$ la deuxième ligne est équivalente à $xy = 2$. Ce qui pour $y \neq 0$ donne $x = \frac{2}{y}$. En remplaçant x par $\frac{2}{y}$ on obtient le système demandé.

5. En multipliant par y^2 la première équation par y^2, on obtient $4 - y^4 = -5y^2$, qui est équivalent à $y^4 - 5y^2 - 4 = 0$.

6. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 + 16 = 41$. Les racines de $u^2 - 5u - 4$ sont donc

$$u_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{41}}{2} = \frac{5 - \sqrt{41}}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{41}}{2} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}.$$

De $41 > 25$, on obtient $\sqrt{41} > \sqrt{25} = 5$. Le réel u_1 est donc négatif et u_2 est positif.

7. On doit avoir $y^4 - 5y^2 - 4 = 0$ et donc $(y^2)^2 - (y^2) - 4 = 0$. En particulier, y^2 soit être égal à u_1 ou à u_2. Comme u_1 est négatif, l'équation $y^2 = u_1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ (et y doit être un réel). La seule possibilité est donc $y^2 = u_2$ et donc $y = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{41}}{2}}$.

8. De $x^2 - y^2 = -5$, on obtient $x^2 = -5 + y^2$ et donc $x = \pm\sqrt{-5 + y^2}$, ce qui donne

$$x = \pm\sqrt{-5 + \frac{5 + \sqrt{41}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}}.$$

De $xy = 2$ on obtient que les signes de x et de y doivent être les mêmes. Les solutions de $z^2 = -5 + 4\mathbf{i}$ sont donc

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{41}}{2}}\right).$$

9. On calcule $\Delta = (-(2 + \mathbf{i}))^2 - 4 \times 1 \times 2 = (4 + 4\mathbf{i} - 1) - 8 = -5 + 4\mathbf{i}$. Les racines du polynômes sont donc de la forme

$$\frac{-(-(2 + \mathbf{i}) + \delta)}{2} = 1 + \frac{\mathbf{i}}{2} + \frac{\delta}{2}$$

où δ est une solution de $\delta^2 = \Delta = -5 + 4\mathbf{i}$. En utilisant le résultat du **8**, on obtient les solutions :

$$z_1 = 1 + \frac{\mathbf{i}}{2} + \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{41}}{2}} = \left(1 + \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{41}}{2}}\right)$$

$$z_2 = 1 + \frac{\mathbf{i}}{2} - \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{41}}{2}} = \left(1 - \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{41}}{2}}\right).$$