EILCO **2015-2016**
CP1 **MAT11**

Outils mathématiques pour l'ingénieur – Examen

Durée : 2h

Calculatrice autorisée
Documents interdits

Exercice 1. Mettre sous la forme $a + \mathbf{i}b$ (a, $b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$\textbf{a. } \frac{3+6\mathbf{i}}{3-4\mathbf{i}}, \qquad \textbf{b. } \left(\frac{2-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^2, \qquad \textbf{c. } \frac{2+5\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} + \frac{2-5\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}.$$

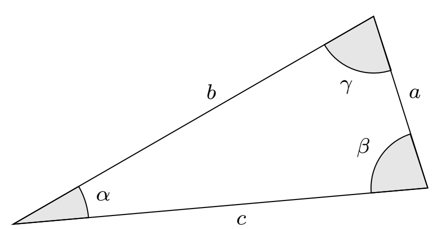
Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(3\sin(x) + \frac{x^2}{2}\right) dx.$

2. $\displaystyle\int_0^{1} x e^{2x}\, dx$ (à l'aide d'une intégration par parties).

3. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$ (faire le changement de variables $\varphi(x) = x^3 + 1$).

Exercice 3. On considère le triangle



En sachant qu'on $a = 6$cm, $b = 4$cm et $c = 5$cm, déterminer à 0.01° près la mesure des angles α, β et γ (on pourra supposer que les angles sont aigus). Attention, la figure n'est pas contractuelle.

Exercice 4. Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ y'(t) - 2\,t\,y(t) = 3\,t\,e^{t^2}$.

1. Donner l'équation homogène (E_H) associée.

2. Calculer la solution générale de l'équation homogène (E_H)

3. A l'aide le la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).

4. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 5. Soit l'equation différentielle $y''(t) - 3\,y'(t) + 2y(t) = 0$.

1. Donner son équation caractéristique.

2. Calculer la solution générale de l'équation différentielle.

3. En déduire la solution satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

4. Recommencer **1**, **2** et **3** pour l'équation différentielle $y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = 0$.

Exercice 6.

1. Combien de solutions possède l'équation $z^2 = -5 + 4\mathbf{i}$.

2. Pour x et y des réels, déterminer l'affixe de $(x + \mathbf{i}y)^2$.

3. Exprimer l'équation $(x+\mathbf{i}y)^2 = -5+4\mathbf{i}$ par un système à 2 équations et 2 inconnues.

4. Montre que, pour $y \neq 0$, ce sytème est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{4}{y^2} - y^2 = -5; \\ xy = 2. \end{cases}$$

5. Montrer que la première équation est équivalente à $y^4 - 5y^2 - 4 = 0$.

6. Résoudre sur pour $u \in \mathbb{R}$ l'équation $u^2 - 5u - 4 = 0$ et étudier le signe des solutions obtenues.

7. En déduire qu'on a nécessairement $y = \pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}}$.

8. A partir de l'équation $x^2 - y^2 = -5$, montrer que les solutions de $z^2 = -5 + 4i$ sont

$$z = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{41}}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{5+\sqrt{41}}{2}} \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{\frac{-5+\sqrt{41}}{2}} - \mathbf{i}\sqrt{\frac{5+\sqrt{41}}{2}}.$$

On pourra considérer le signe de xy.

9. A partir des solutions de $z^2 = -5 + 4\mathbf{i}$, déterminers les racine du polynôme

$$z^2 - (2 + \mathbf{i})z + 2.$$