TP 2 – Graphismes avec `Maxima`

1 Utilisation de `plot2d`

La commande `plot2d` permet de dessiner une courbe ou une ligne brisée passant par des couples de points dans un repère cartésien à deux dimension. Par défaut la commande `plot2d` affiche le résultat dans une nouvelle fenêtre, pour avoir l'affichage au sein de la fenêtre principale il faut utiliser la commande `wxplot2d`. Voici les trois syntaxes possible :

- `plot2d(f(x),xrange,opts)` qui permet d'afficher une fonction $x \mapsto f(x)$ pour x parcourant un intervalle donné. Par exemple,

  ```
  plot2d(x**2,[x,-1,1])
  ```

  affiche le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ pour $x \in [-1, 1]$. Notez que `xrange` est une liste de 3 éléments, le premier est la variable de la focntion, et les deux autres les bornes de l'intervalle.

- `plot2d([parametric,x(t),y(t),trange],opts)` qui permet d'afficher une courbe paramétrique $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour t parcourant un intervalle donné. Par exemple,

  ```
  plot2d([parametric,cos(t),sint(t),[t,-%pi,%pi]
  ```

  affiche le cercle unité.

- `plot2d([discrete,points],opts)` qui permet d'afficher une ligne brisé passant par des points données. La liste `points` contient les coordonnées des points représenté par une liste `[x,y]`. Par exemple,

  ```
  plot2d([discrete,[[0,0],[1,1],|2,0]]])
  ```

  trace le triangle passant par les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(2, 0)$.

Exercice 1. Pour obtenir un tracer dans un repère orthonormée, on peut utiliser l'option `same_xy`

1. Tester les exemples précédents.

2. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \sin(3\,x) + 2 \times \cos(x)$ pour $x \in [0, 3\pi]$.

3. Tracer la folium d'Albercht Dürer dont une paramétrisation est, pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin(3t) + \sin(t) \end{cases}$$

4. Tracer la courbe de Lissajous dont une paramétrisation est, pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

5. Tracer l'astroïde dont une paramétrisation est, pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)^3 \\ y(t) = \sin(t)^3 \end{cases}$$

6. Tracer le carré passant par les points $(-1, -1)$ et $(1, 1)$ dans la fenêtre $[-2, 2] \times [-2, 2]$. On pourra utiliser les options `[x,-2,2]` et `[y,-2,2]`.

7. Tracer un pentagone régulier centré en $(0, 0)$.

2 Utilisation de la librairie `draw`

Bien qu'utile la fonction `plot2d` a quelques limites. Pour les graphismes un peu plus compliqués, on utilisera la librairie `draw` et sa commande `draw2d`. Commencer par chargée la librairie `draw` à l'aide la commande

```
load(draw)
```

Le principal avantage de cette librairie est l'utilisation d'objet graphique. Une courbe, une courbe paramétrée, une ligne brisée sont des objets graphiques.
Pour créer la courbe `C1` de la fonction $x \mapsto x^2$ pour $x \in [-1, 1]$ on utilise la commande

```
C1:explicit(x**2,x,-1,1)
```

Pour afficher la courbe `C1` on utilise la commande

```
draw2d(C1)
```

Pour créer la courbe paramétrique `C2` du cercle, on utilise

```
C2:parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi)
```

Pour créer le triangle passant par les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(2, 0)$, on utilise

```
T:points([[0,0],[1,0],[2,0]])
```

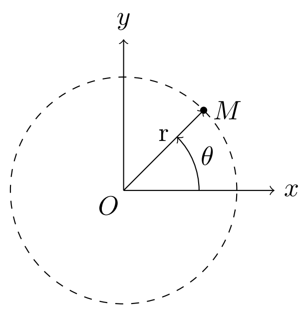
On peut afficher les deux courbes `C1`, `C2` et le triangle `T` avec la commande

```
draw2d(C1,C2,T)
```

Les options de `draw2d` et les types d'objet graphique disponibles sont nombreux, des indications seront données dans les exercices si besoin. Pour afficher le dessin dans la fenêtre principale on utilisera `wxdraw2d`. pour travailler dans un repère othonormée on utilisera l'option `proportional_axes = 'xy`

Exercice 2. Tester les commandes précédentes.

En coordonnée polaire, la position d'un point M dans le plan est définie par la distance r de M à l'origine et par l'angle θ entre (Ox) et (OM).



Exercice 3 (`polar`)**.**

1. Tracer la spirale d'Archimède d'équation polaire $\rho = \theta$ pour $\theta \in [0, 10\pi]$.
2. Tracer le Lemniscate de Bernoulli d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.
3. Tracer la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$.
4. Dessiner une marguerite en coordonnées polaires.

Exercice 4.

1. Sur un même graphique représenter la courbe de $x \mapsto \cos(x)$ en bleu et la courbe de $x \mapsto \sin(x)$ en rouge pour $x \in [0, 2\pi]$.
2. Sur un même graphique tracer la droite d'équation $y = x$ en bleu et les courbes de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ en rouge. Qu'illustre ce dessin ?

Exercice 5. Soit $A = (0,0), B = (3,0)$ et $C = (1,2)$.

1. Sur une figure `Maxima`représenter les points A, B et C. `[points]`.

2. Représenter les points de la figure précédente par des croix. `[point_type]`.

3. Ajouter le nom des points. `[label,label_alignment]`.

4. Tracer le triangle ABC.

5. Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonale de A sur (BC).

6. Sur le dessin ajouter le point H et la hauteur issue de A.

3 Exercices

Exercice 6. Nous étudions dans ce qui suit, le mouvement d'un projectile lancé à une vitesse initiale de norme 1 et d'orientation θ mesurée par rapport au sol supposé horizontal (perpendiculaire à la direction du vecteur accélération gravitationelle $\vec{g}$). Nous limitons cette étude aux cas où :

- l'unique force à laquelle est soumis le projectile est la force de pesanteur
- l'accélération gravitationnelle $\vec{g}$ est constante (en norme et en orientation)

On choisit un repère cartésien d'on l'axe y a la même direction que celle du vecteur accélération gravitationelle $\vec{g}$ et dont le sens est opposée à celui de ce vecteur. On place l'origine du repère à la position initiale du projectile.

1. Déterminer les équations horaire $(x(t), y(t))$ du projectile.

2. Sur un même graphique, tracer les trajectoire du projectile pour les $\theta \in [\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{4\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{6\pi}{12}]$.

3. Exprimer $y(t)$ en fonction de $x(t)$.

On appelle temps de vol, le temps que met le projectile pour retomber sur le sol après avoir été lancé.

4. Déterminer le temps de vol T du projectile en fonction de θ. Tracer T en fonction de θ.

5. Pour quelle valeur de θ le temps de vol semble t il maximal. Le démontrer.

On appelle portée P, la distance horizontale parcourue par le projectile.

6. Déterminer la portée P en fonction de θ. Tracer P en fonction de θ.

7. Pour quelle valeur de θ la portée est elle maximale. Le démontrer.

La flêche est l'altitude maximale atteinte par le projectile.

8. Déterminer la flêche F en fonction de θ. Tracer F en fonction de θ.

9. Pour quelle valeur de θ la flêche est elle maximale. Le démontrer.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormée. On note A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α et B le symétrique de de A par rapport à l'axe (Oy). Les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ en A et B se coupent en S et coupent l'axe (Ox) en C et D respectivement.

1. A l'aide de `Maxima`, déterminer pour $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque les coordonnées des points A, B, S, C et D.

2. Faire plusieurs figures pour des valeurs de α différentes.

3. Calculer les distance SC et CD en fonction de α.

4. Établir que $SC = CD$ est équivalent à SCD est équilatéral.

5. Déterminer les valeurs de α tel que le triangle SCD soit équilatéral.

Exercice 8. On pose $A = (0,1), B = (1,1), C = (1,0)$ et $D = (0,0)$. $ABCD$ est un carré de côté 1. Le point E est situé sur la droite (AB), à l'extérieur du segment $[AB]$ et du côté de B, le point F est sur le segment $[AD]$ et $BE = DF$. On se propose de déterminer la position du point E pour laquelle l'aire du triangle BEI est maximal. On note x la distance BE.

1. Déterminer les coordonner de E puis F.

2. Faire une figure avec `Maxima` pour x quelconque (pour le moment on omettra le point I) tracer cette figure pour certaines valeurs de x.

3. Démontrer que $BI = \dfrac{x - x^2}{x+1}$. Inclure le point I sur la figure.

4. Déterminer l'aire $S(x)$ du triangle BEI en fonction de x.

5. Tracer la courbe $x \mapsto S(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

6. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire $S(x)$ est maximale.