ULCO **2018 - 2019**
L1 Mathématiques et Informatique **Calcul Formel**

TP 7 : Des exemples de constructions à la règle et au compas en `Maxima`

1 Construction de Ptolémée du pentagramme : l'étoile à 5 branches

Dans un cercle (C_1) de centre O, passant par un point D, nous voulons inscrire un pentagone régulier croisé, ayant pour sommet ce point D. Il est représenté sur la figure ci-dessous.

Cette figure a été importée du très joli site :

http://debart.pagesperso-orange.fr/geoplan/construc_elem_classique.html

qui présente de nombreuses constructions à la règle et au compas.
N'hésitez pas non plus à lire pendant vos prochaines grandes vacances, le texte de François de Marçay : "Constructions à la règle et au compas" :

https://www.math.u-psud.fr/ merker/Enseignement/Geometrie-SEM/regle-compas.pdf

Ce texte s'adresse aux futurs professeurs des écoles, aux futurs graphistes informaticiens et aussi aux futurs professeurs de mathématiques.

Voici la construction : considérons comme ensemble de points de base $\mathcal{B} = \{O, A_1, A_2, D, K\}$ où $[A_1A_2]$ est un diamètre d'un cercle C_1 de centre O et de rayon 1, D un point du cercle tel que (OD) soit perpendiculaire à (A_1A_2) et K le milieu de $[OA_1]$.

1. Tracer le cercle de Ptolémée $C_2 = K(D)$, de centre K et passant par D. Ce cercle coupe le segment $[OA_2]$ en un point U.

2. Tracer le cercle $C_3 = D(U)$, de centre D et passant par U. Les points d'intersection des cercles C_1 et C_3 déterminent le côté $[AB]$.

3. À partir de D, reporter au compas la longueur AB pour tracer les deux autres sommets C et E sur le cercle C_1.

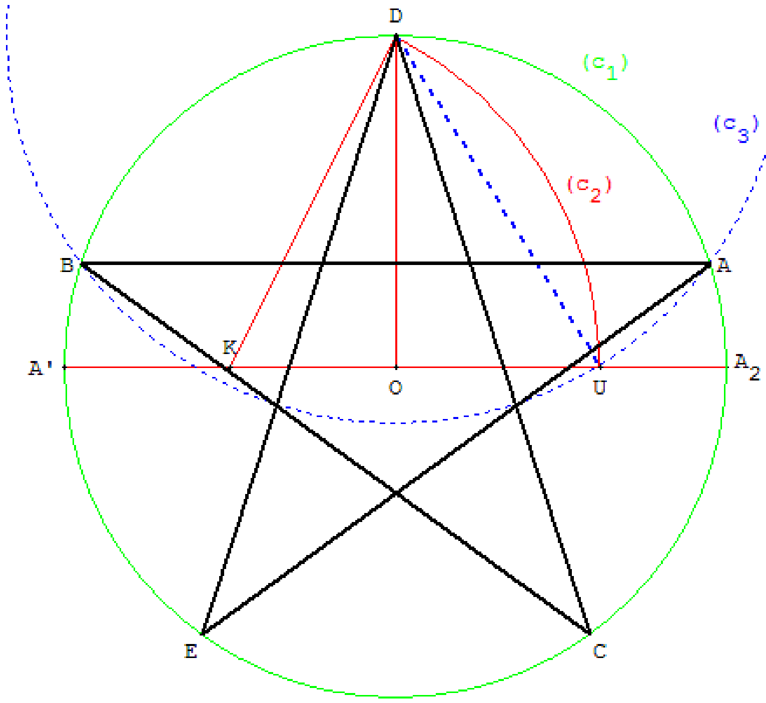

Figure 1: Le point A' représente ici notre point A_1

Nous voulons être capables, d'ici la fin de cette séance, d'effectuer tous les calculs nécessaires à l'élaboration de la Figure 1 et de la reproduire le mieux possible avec `Maxima`. Avant de donner une définition de ce qu'est un point constructible à la règle et au compas, imaginez des constructions à la règle et au compas des objets suivants:

1. La médiatrice d'un segment $[AB]$.

2. La bissectrice d'un couple de demi-droite.

3. Un segment de longueur $\sqrt{2}$ à partir d'un segment de longueur 1 donné.

4. En poursuivant la construction précédente, imaginez un polygone en forme de spirale constructible à la règle et au compas et donnant tous les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...

2 Une définition

Voici d'une façon un peu plus formelle, une définition possible de ce qu'est un point constructible à la règle et au compas.

Définition 1. *Dans le plan P, on considère un ensemble de points de base $\mathcal{B}$ qui contient au moins deux points. Un point M de P est dit constructible à la règle et au compas à partir de $\mathcal{B}$ s'il existe une suite finie de points du plan P se terminant par M : M_1, $M_2, \ldots, M_n = M$ telle que pour tout i entre 1 et n, le point M_i est un point d'intersection*

- *soit de deux droites,*
- *soit d'une droite et d'un cercle,*
- *soit de deux cercles,*

ces droites et cercles étant obtenus à l'aide de l'ensemble $E_i = \mathcal{B} \cup \{M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}\}$ de la façon suivante :

- *chaque droite passe par deux points distincts de E_i,*
- *chaque cercle est centré en un point de E_i et a pour rayon la distance entre deux points de E_i.*

Une droite passant par deux points constructibles est dite constructible.
Un cercle centré en un point constructible et ayant pour rayon la distance entre deux points constructibles est dit constructible.

Exercice 1.

1. Relire lentement cette définition.
2. Relire la construction des sommets du pentagramme et vérifier que la définition 1 s'applique en décrivant avec soin quels sont les points M_i et les ensembles E_i.

3 Rappels sur les équations de droites

Dans le repère usuel $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de pente m a pour équation

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

Le calcul de la pente d'un segment amène immédiatement l'équation de la droite passant par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A),$$

que l'on peut écrire

$$(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0.$$

Le calcul du polynôme de deux variables x et y qui apparaît ici, peut être implémenté en `Maxima` par la fonction suivante :

```
(%i1) polydroite(A,B):=(B[1]-A[1])*(y-A[2])-(x-A[1])*(B[2]-A[2]);
```

Il faudra impérativement lors de l'appel de cette fonction que les variables `A` et `B` soient des listes de deux éléments.

Exercice 2.

1. Saisir dans `Maxima` la commande `polydroite` et trouver à titre d'exemple l'équation de la droite passant par les points $(0, 2)$ et $(3, -4)$. Vérifier que l'équation que vous trouverez avec `Maxima`, c'est à dire $3 * (y - 2) + 6 * x = 0$, est bien satisfaite par ces deux points.

2. Tester la commande `polydroite` pour deux points placés horizontalement ou verticalement et vérifier que l'on pourra bien s'en servir dans ce cas pour obtenir les équations correspondantes.

4 Rappels sur les équations de cercles

Le cercle $C(A, R)$ de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon $R > 0$ est décrit par l'ensemble

$$\begin{aligned} C(A,R) &= \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 | AM = R\right\} \\ &= \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 | AM^2 = R^2\right\} \text{ car AM et R} > 0 \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 - R^2 = 0\right\} \end{aligned}$$

Le cercle centré en $A(x_A, y_A)$ et passant par $B(x_B, y_B)$ a donc pour équation

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 = 0.$$

On implémente le polynôme de deux variables qui définit l'équation du cercle de centre A et passant par B par la commande

```
(%i1) polycercle(A,B):=(x-A[1])^2+(y-A[2])^2-(B[1]-A[1])^2-
                                                 (B[2]-A[2])^2;
```

Il faudra impérativement lors de l'appel de cette fonction que les variables `A` et `B` soient des listes de deux éléments.

De même, on peut implémenter le polynôme de deux variables qui définit l'équation du cercle de centre A et de rayon R par la commande

```
 (%i1) polycercle2(A,R):=(x-A[1])^2+(y-A[2])^2-R^2;
```

Attention, quand vous appelez la commande `polycercle2`, la variable `A` doit être une liste de deux éléments et `R` doit représenter un réel.

Exercice 3.

1. Tester avec `Maxima` la commande polycercle et vérifier que l'équation du cercle de centre $A(-2,1)$ et passant par $B(3,2)$ est $(y-1)^2+(x+2)^2-26=0$.

2. Tester avec `Maxima` la commande polycercle2 et vérifier que l'équation du cercle de centre $A(-2,1)$ et de rayon 3 est $(y-1)^2+(x+2)^2-9=0$.

Tracé d'un cercle : Vous avez peut-être sans vous en être rendu compte déjà travaillé avec une équation paramétrique du cercle unité. En effet, à chaque fois que vous avez placé un point M sur le cercle unité, ses coordonnées étaient de la forme $(\cos t, \sin t)$ où t est l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{OM}$.
Les coordonnées d'un point du cercle de centre O et de rayon R sont donc de la forme $(R\cos t, R\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.
Les coordonnées d'un point du cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R sont donc de la forme $(x_A, y_A) + (R\cos t, R\sin t) = (x_A + R\cos t, y_A + R\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Pour gagner du temps par la suite, on peut définir les fonctions `cercle` et `cercle2` qui nous permettront de créer plus vite les dessins où plusieurs cercles apparaissent.

```
cercle2(A,R):=parametric(A[1]+R*cos(t),A[2]+R*sin(t),t,0,2*%pi);
norme(A,B):=sqrt((B[1]-A[1])^2+(B[2]-A[2])^2);
cercle(A,B):=block([R],R:norme(A,B),parametric(A[1]+R*cos(t),
A[2]+R*sin(t),t,0,2*%pi));
```

Nous avons utilisé ci-dessus une commande `block` qui est une forme assez générale de fonction en `Maxima`. Elle permet de réaliser des calculs intermédiaires séparés par des virgules, la valeur affectée à la fonction étant la dernière évaluation effectuée. Elle permet aussi d'utiliser des variables locales, par exemple la variable R dans la fonction `cercle2`.

Exercice 4. Obtenir avec `Maxima` le début de la construction du pentagramme en y plaçant les points $0, A_1, A_2, D, K$, leur nom et les cercles C_1, C_2. Partez de $O(0,0)$ et $A_2(1,0)$.

4.1 Intersections de deux courbes

Un point $M(x, y)$ appartient à l'intersection de deux courbes s'il vérifie le système formé par les deux équations des courbes, les deux inconnues étant x et y.

Intersection de deux droites :

Par exemple, $M(x, y)$ est l'intersection des deux droites $D_1 \equiv y = 3x - 2$ et $D_2 \equiv y = -2x + 1$ si ses deux coordonnées vérifient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - y - 2 & = & 0 \\ -2x - y + 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Considérons un exemple de résolution avec `Maxima` : soient quatre points A, B, C, D dont nous choisissons les coordonnées ci-dessous, et calculons les coordonnées du point obtenu comme intersection des droites (AB) et (CD).

```
(%i1) A:[1,4]$B:[3,6]$C:[1,5]$D:[3,-2]$
      s1:solve([polydroite(A,B)=0,polydroite(C,D)=0],[x,y]);
       M:subst(s1[1],[x,y]);
(s1) [[x=11/9,y=38/9]]
(M) [11/9,38/9]
```

`Maxima` regroupe toutes les solutions données par `solve` dans une liste, mais comme il n'y a qu'un couple solution $(11/9, 38/9)$, `Maxima` place la liste `[x=11/9,y=38/9]` entre deux crochets. Il faut donc utiliser la commande `s1[1]` pour aller "chercher" le premier élément de la liste `[[x=11/9,y=38/9]]`. Quand il y aura plusieurs solutions amenées par la commande `solve`, vous devrez aller chercher celle qui vous intéresse par une commande du type `s1[1],s1[2]`, etc... Ceci se passera quand vous intersecterez deux cercles ou une droite et un cercle.
La commande `subst` substitue les valeurs trouvées par `solve` et placées dans `s1` dans l'objet placé en seconde position.

Intersection d'une droite et d'un cercle :
Un point $M(x, y)$ appartient à l'intersection d'une droite et d'un cercle s'il vérifie à la fois l'équation de la droite et l'équation du cercle. Il faut donc impérativement résoudre un système de deux équations à deux inconnues mais cette fois, ce n'est plus un système linéaire car l'équation du cercle comporte des carrés.
La commande de résolution par `Maxima` pourra être si l'on veut trouver l'intersection d'un cercle $C(A, AB)$ et d'une droite (CD):

`solve([polycercle(A,B)=0,polydroite(C,D)=0],[x,y]);`
Il vous faudra choisir parmi deux solutions celle que vous voulez (si la droite coupe le cercle en deux points distincts).

Intersection de deux cercles : Vous avez compris qu'il faut résoudre un système de deux équations à deux inconnues où cette fois les deux équations sont de degré 2.
La commande de résolution par `Maxima` pourra être si l'on veut trouver l'intersection de deux cercles $A(B)$ et $C(D)$:

`solve([polycercle(A,B)=0,polycercle(C,D)=0],[x,y]);`

Il vous faudra choisir parmi deux solutions celle que vous voulez (si les cercles s'intersectent en deux points distincts).

Exercice 5.

1. Poursuivre avec `Maxima` la construction du pentagramme en résolvant un système d'équations pour trouver le point U.
2. Poursuivre avec l'obtention des points A et B.
3. Poursuivre avec l'obtention des points C et E.
4. Obtenir un dessin représentant la construction du pentagramme.
5. Nous avons pour l'instant admis que les points A, B, C, D, E forment effectivement un pentagone régulier étoilé. Calculer avec `Maxima`, si c'est nécessaire, les distances AB, BC, CD, DE, EA et prouver ainsi par un calcul assisté de l'ordinateur que le pentagone étoilé est régulier.

4.2 Construction à la règle et au compas de la division en le nombre d'or d'un segment

Soit $[AB]$ un segment unité. Cela signifie que vous choisissez l'unité comme étant la longueur du segment que vous aurez choisi librement sur votre feuille.

On veut construire à la règle et au compas l'unique point P appartenant au segment $[AB]$ tel que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Notons comme précédemment $M(N)$ le cercle de centre M et de rayon MN. Construire

1. Le cercle $C_1 = A(B)$.
2. Le cercle $C_2 = B(A)$; il intersecte le cercle C_1 en deux points C et D.
3. La droite (AB) qui intersecte C_1 en un point E différent de B.
4. Le cercle $C_3 = E(B)$ qui intersecte C_2 en F (F étant le point de l'autre côté de C relativement à la droite (AB)).
5. Le point P intersection de (CF) et (AB).

Construire avec `Maxima` les éléments de cette construction et démontrer par un calcul formel l'égalité

$$\frac{AP}{PB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

`Maxima` a bien du mal à simplifier complètement, à vous de voir comment finaliser les choses.
Obtenir le dessin de cette construction à la règle et au compas.