ULCO **2018 - 2019**
L1 Informatique **Calcul Formel**

TP9 : Quand l'enseignement de Mathématiques 3 rencontre `Maxima`

Revenons un peu sur les concepts abordés en Mathématiques 3. Et oui, que de souvenirs ! Vous y avez appris à résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre, des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Vous savez également déterminer le terme général de certaines suites définies par récurrence, résoudre un système linéaire ou encore développer une fraction rationnelle en élément simples. Vous avez vu ou allez voir le concept de développement limité ainsi que son utilité notamment pour les calculs de limites. Mais au fait, `Maxima` sait faire tout cela ! C'est très utile pour la vérification de ses calculs !

1 Résolution d'équations différentielles

`Maxima` sait résoudre certaines équations différentielles d'ordre 1 ou 2 (pas toutes ; ce logiciel a ses limites !). Pour cela, on utilise la commande `ode2`. La syntaxe est la suivante :
`ode2(équation différentielle, nom de la fonction cherchée, variable);`
Ainsi, si je veux résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' + y = \dfrac{1}{1+\exp(x)}$, il suffit de taper dans `Maxima` les commandes suivantes. Testez les.

```
(%i1) eq: 'diff(y,x)+y=1/(1+exp(x));
ode2(eq,y,x);
```

Attention !!! N'oubliez pas l'apostrophe avant la commande `diff`. Cela permet notamment à `Maxima` de savoir que l'on cherche une fonction `y` et non un scalaire. Si maintenant je veux résoudre l'équation différentielle du second ordre $xy'' + 3xy + 3x = 0$ (et, oui `Maxima` sait résoudre des équations différentielles d'ordre 2 à coefficients non constants) il suffit d'utiliser les commandes

```
(%i2) eq: x*'diff('diff(y,x),x)+3*x*y+3*x=0;
ode2(eq,y,x);
```

Remarque 1. Si `Maxima` ne sait pas résoudre l'équation différentielle, il retourne `false`. Essayez avec l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 2$.

La commande `ode2` permet de trouver les solutions générales d'une équation différentielle. Il est également possible de résoudre des problèmes de Cauchy, c'est-à-dire, résoudre une équation différentielle avec des conditions initiales. La commande a utiliser diffère suivant que l'on a affaire à une équation différentielle du premier ordre ou de second ordre. On choisit la commande `ic1` dans le cas d'un problème de Cauchy d'ordre 1 et la commande `ic2` dans le cas de d'un problème de Cauchy d'ordre 2.

Exemple 1. Pour résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, il suffit de taper les commandes `Maxima`

```
(%i3) eq:'diff(y,x)-y=0;
sol_gen:ode2(eq,y,x);
sol:ic1(sol_gen,x=0,y=1);
```

Pour résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$, il suffit de taper les commandes `Maxima`

```
(%i4) eq:'diff('diff(y,x),x)+y=0;
sol_gen:ode2(eq,y,x);
sol:ic2(sol_gen,x=0,y=1,'diff(y,x)=0);
```

Pour résoudre le système $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$, il suffit d'utiliser la commande `bc2` à la place de `ic2`. On obtient :

```
(%i5) eq:'diff('diff(y,x),x)+y=0;
sol_gen:ode2(eq,y,x);
sol:bc2(sol_gen,x=0,y=1,x=%pi/2,y=0);
```

Testez les exemples précédents.

Exercice 1.
1. Résoudre l'équation différentielle $(1+x)^2y'' + (1+x)y' = 2$ sur $]-1,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 6x + 1 + 4\exp(-x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution du problème de Cauchy $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
4. Résoudre sur $]0,\pi[$ le système $(S)\begin{cases} y'' + 4y = 2 \\ y(0) = 1 \\ y(3\pi/4) = 1/2 \end{cases}$.

2 Résolution de systèmes linéaires

Vous avez déjà eu l'occasion dans les TP précédents de résoudre des systèmes équations. Rappelons un peu la syntaxe. On utilise la commande `solve` de la façon suivante `solve([eq1,...,eqn],[var1,...,varn])`. Par exemple, si vous voulez résoudre le système $(S)\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$ il suffit de taper les commandes `Maxima`

```
(%i6) solve([x+y-2*z=5,x-y-z=1,x+z=3],[x,y,z]);
```

Testez cet exemple.

Exercice 2. Equilibrer (en utilisant des entiers naturels) les équations bilans suivantes :
1. $C_4H_{10} + O_2 \to CO_2 + H_2O$ (combustion du butane),

2. $KClO_3 + S + C \to K_2S + CO_2 + Cl_2$,
3. $H_2 + Fe_3O_4 \to H_2O + FeO$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rl} 2x - y + z & = a \\ x - z & = b \\ -2x + 2y - z & = c. \end{array}\right.$ avec a, b et c des constantes réelles.

2. $\left\{\begin{array}{l} x - y + z - t = 1 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \\ x - y - z + t = 2. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rl} 3x + 4y + z + 2t & = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t & = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t & = 13. \end{array}\right.$

Exercice 4. On considère les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer, si cela est possible, leur matrice inverse. (On regardera le fonctionnement des commandes `matrix`, et `invert`.)

3 Suites numériques

En Mathématiques 3 vous vous êtes intéressés à la monotonie des suites, à la convergence de suites ainsi qu'à la détermination de suites définies par récurrence. Nous allons considérer ce dernier point. Pour cela nous utiliserons le package `solve_rec`. N'oubliez donc pas de le charger grâce à `load("solve_rec")`. Grâce à ce package vous serez par exemple capable d'obtenir une formule ne dépendant que de n du terme u_n de la suite de Fibonacci. Pour cela, on utilise la commande `solve_rec` et la syntaxe suivante
`solve_rec(relation de récurrence sur les` u_n`,` $u[n]$`,` $u[0] = a_1$`,...,`$u[n] = a_n$`);`
On rappelle que la suite de Fibonacci est la suite d'entiers naturels définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Ainsi, pour obtenir une formule de u_n en fonction de n avec `Maxima`, il suffit de taper les commandes suivantes

```
(%i7) load("solve_rec");
solve_rec(u[n]=u[n-1]+u[n-2],u[n],u[0]=0,u[1]=1);
```

A vous de tester.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & -5u_n + 3, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & 4u_n + 6 - 5n + 3n^2, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & -u_n + 2 \times (-1)^n, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{5}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2 \times 7^n. \end{array}\right.$$

4 Polynômes et fractions rationnelles

Vous connaissez un peu les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est soit le corps des réels soit le corps des nombres complexes. On rappelle qu'une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une fonction $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. On rappelle également qu'une fraction rationnelle est une fonction définie comme le quotient d'une fonction polynomiale f par une fonction polynomiale g non nulle. La fraction rationnelle $\dfrac{f}{g}$ n'est pas définie en les racines de la fonction polynomiale g. Vous avez appris à effectuer la division euclidienne de deux polynômes, à factoriser des polynômes, à développer des fractions rationnelles en éléments simples et à intégrer des fractions rationnelles. Bien évidemment, `Maxima` sait aussi le faire ! Commençons par considérer la division euclidienne de deux polynômes. Il suffit d'utiliser la commande `divide`. `Maxima` retourne alors une liste de deux éléments. Le premier correspond au quotient de la division euclidienne, le second correspond au reste de la division euclidienne.

Exemple 2. *Considérons les polynômes définis par $f(t) = 3t^5+4t^2+1$ et $g(t) = t^2+2t+3$ et effectuons la division euclidienne de f par g. En `Maxima` cela donne :*

```
(%i8) define(f(t), 3*t^5+4*t^2+1)$
define(g(t), t^2+2*t+3)$
divide(f(t),g(t),t);
```

On obtient alors que le quotient est $3t^3 - 6t^2 + 3t + 16$ et que le reste est $-41t - 47$. Ainsi $f(t) = (3t^3 - 6t^2 + 3t + 16)g(t) - 41t - 47$.

Exercice 6. Calculer la division euclidienne de f par g :

1. $f(t) = 3t^5 + 2t^4 - t^2 + 1$, $g(t) = t^3 + t + 2$.
2. $f(t) = t^4 - t^3 + t - 2$, $g(t) = t^2 - 2t + 4$.
3. $f(t) = t^5 - 7t^4 - t^2 - 9t + 9$, $g(t) = t^2 - 5t + 4$.

En ce qui concerne la factorisation, il existe une commande `factor`. La factorisation n'est pas toujours maximale. En effet, cela ne permet pas de factoriser dans $\mathbb{C}$ et parfois le logiciel ne sait pas factoriser certains polynômes simples tels que $t^2 + 6t - 3$ bien que ce dernier se factorise en $(t+2\sqrt{(3)}+3)(t-2\sqrt{(3)}+3)$. Mais vous connaissez maintenant le lien entre la factorisation d'un polynôme et les racines de ce dernier.

Exercice 7. Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:

1. $t^3 + t - 10$.
2. $t^4 + 6t^3 - 4t^2 - 6t + 3$.
3. $t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 5t + 6$.

Exercice 8. Déterminer, à l'aide de `Maxima`, un polynôme f de degré 2 vérifiant les conditions $f(-1) = 1$, $f(-2) = -5$ et $f(3) = 5$.

Et si on décomposait maintenant des fractions rationnelles en éléments simples. A la main, ce travail demande de la concentration et mène à la résolution de systèmes linéaires. `Maxima` vous sera alors très utile pour vérifier vos calculs réalisés rigoureusement à la main en Mathématiques 3. Pour cela on utilise la commande `partfrac`.

Exemple 3. *On souhaite décomposer la fraction rationnelle* $\dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-3}$ *en éléments simples, il suffit d'utiliser les commandes* `Maxima` *suivantes :*

```
(%i9) define(f(x),(x**3-3*x**2+x+1)/(x-3));
partfrac(f(x),x);
```

Exercice 9. A l'aide de `Maxima`, décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2-5x+6}$,
2. $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)(x^2-4x)}$,
3. $f(x) = \dfrac{-x^2-2x-3}{x(x^2+2x+5)}$,
4. $f(x) = \dfrac{9x^2+5x+1}{x(x^2+x+1)}$.

5 Développements limités

Abordons maintenant les développement limités. En avez-vous déjà entendu parlé en Mathématiques 3 ? Pas de panique je vais faire un bref aperçu.

Définition 1. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un élément de I. on dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 si f peut s'écrire sous la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels et $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 2. *On rappelle que si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 alors ce développement est unique.*

Exemple 4. *On considère la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On sait (en utilisant la formule du binôme) que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Ainsi, on a $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \dfrac{x}{1-x}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} = 0$. La fonction f admet donc un développement limité à tout ordre en 0.

Comment demander à `Maxima` de déterminer le développement limité d'ordre n en x_0 d'une fonction f quand il existe ? Il suffit d'utiliser la commande `taylor`. La syntaxe est la suivante :

`taylor(fonction, variable, lieu du dvp, ordre du dvp);`

Ainsi pour déterminer le développement limité d'ordre 10 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, il suffit de taper la commande `Maxima` suivante :

```
(%i10) taylor(1/(1-x),x,0,10);
```

Il existe des liens entre développement limité et dérivabilité d'une fonction f

Théoreme 1. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un élément de I.*

1. *Dire que f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0, c'est dire que f est continue (ou prolongeable par continuité en x_0). Après prolongement éventuel ce développement s'écrit $f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*
2. *Dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, c'est dire que f est dérivable (après prolongement éventuel en x_0). Après prolongement, ce développement s'écrit $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*
3. *Une fonction f peut admettre un développement limité à l'ordre 2 en x_0 mais ne pas être deux fois dérivable en x_0*
4. *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0. Ce développement est obtenu par la formule de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

   avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 3. *Grâce au théorème précédent, on obtient que les fonctions définies par $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \cosh(x)$, $f(x) = \sinh(x)$, $f(x) = \tan(x)$, $f(x) = \tanh(x)$, $f(x) = \arccos(x)$, $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arctan(x)$, $f(x) = \exp(x)$, $f(x) = \log(1 + x)$, $f(x) = \log(1 - x)$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ... admettent des développement limités à tout ordre en 0.*

Exercice 10. Déterminer un développement limité à l'ordre 7 en 0 des fonctions définies par $f(x) = \tan(x)$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cosh(x)$, $f(x) = \exp(x)$ et $f(x) = \log(1 + x)$.

Exercice 11. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions définies par $f(x) = (x + 1)^2e^{-x} - 1$, $f(x) = (2x + 3)\ln(1 - x)$, $f(x) = \ln(1 + x)\sqrt[3]{1 + x}$ et $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$.

Il est également possible de déterminer des développements limités en d'autres points que 0. Considérons, par exemple, la fonction définie par $f(x) = \ln(2x - 3)$. On obtient un développement limité à l'ordre 8 en $x_0 = 2$ grâce à la commande `Maxima`

```
(%i11) taylor(log(2*x-3),x,2,8);
```

Exercice 12. Donner un développement limité à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes (le point en lequel est déterminé le développement limité est indiqué entre parenthèses) :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ $(x_0 = 1)$,
2. $f(x) = \ln(\sin(x))$ $(x_0 = \dfrac{\pi}{3})$,
3. $f(x) = \exp(\sqrt{x})$ $(x_0 = 1)$.

Une des utilités des développements limités est le calcul de limites comme par exemple $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$. Bien évidemment la commande `limit` de `Maxima` donne immédiatement la réponse mais essayons avec les développements limités. Considérons la commande

```
(%i12) taylor(sin(x),x,0,3)/x;
```

Grâce à ces instructions, il est clair que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Exercice 13. Grâce à un développement limité, déterminer la limite des fonctions suivantes en les points indiqués entre parenthèses :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ $(x_0 = 1)$,
2. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ $(x_0 = 0)$,
3. $f(x) = \dfrac{\ln(4-x)}{x(x-3)}$ $(x_0 = 3)$.