Exponentielle et logarithme

1 Définition de la fonction $\exp(x)$

En mathématiques, le nombre e est une constante dont le développement décimale commence par $2,718281828$.... La fonction exponentielle, notée exp est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à chaque réél x associe la puissance e^x.
Notez que pour tout x, on a $e^x > 0$ et $e^0 = 1$.

2 Propriétés algébriques de $\exp(x)$

- Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a e^b$.
- Pour tout réel a, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- Pour tous réels a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tous réels a et b, $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$.

3 Etude de la fonction exponentielle

3.1 Sens de variation

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Alors, pour tous réels a et b, on a
- $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$,
- $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$,
- $e^a \leqslant e^b$ équivaut à $a \leqslant b$.

3.2 Limites

On a

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est donc asymptote au voisinage de $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction exponentielle.
Croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ pour tout } n \geqslant 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x\, x^n = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 0$$

3.3 Dérivée

La fonction $\exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée : $(\exp(x))' = \exp(x)$.
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a

$$f'(x) = e^{u(x)}u'(x).$$

4 Définition de la fonction logartihme

La fonction logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}^+$ et notée $\ln(x)$ est la réciproque de la fonction $\exp(x)$.
On a donc :
- $\ln 1 = 0$,
- pour tout réel a, $\ln e^a = a$,
- pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln a} = a$.
- pour tout réels a et $b > 0$, $b = e^a$ équivaut à $a = \ln b$.
- pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, $a^b = e^{b \ln a}$

5 Propriétés algébriques de $\ln x$

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln ab = \ln a + \ln b$.
- Pour tout réel $b > 0$, $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, $\ln a^b = b \ln a$.

6 Etude de la fonction $\ln x$

6.1 Sens de variation

La fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Alors, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a
- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$,
- $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$,
- $\ln a \leqslant \ln b$ équivaut à $a \leqslant b$.

6.2 Limites

On a

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

L'axe des ordonnées est donc asymptote au voisinage de 0 à la courbe représentative de la fonction $\ln x$.
Croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ pour tout } n > 0$$

$$\lim_{x \to 0} e^x x^n = +\infty \text{ pour tout } n > 0$$

6.3 Dérivée

La fonction $\ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive, la fonction f définie par $f(x) = \ln u(x)$ est dérivable sur I et on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$