

Feuille d'exercices 2 - Fonctions composées et réciproques, logarithme et fonction exponentielle

Exercice 1. Déterminez la fonction réciproque de

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5.$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4.$

Dessinez les courbes de f et de f^{-1} dans le même plan cartésien. Observation ?

Exercice 2. Pour les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes déterminez un intervalle de \mathbb{R} où f est bijective et calculez f^{-1} :

(a) $f(x) = x^2 + \frac{3}{4};$

(b) $f(x) = 4(x - 2)^2;$

(c) $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+1)}.$

Exercice 3. Montrer que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ est bijective. Sa fonction réciproque est notée $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Calculez $(\sqrt[3]{x})'$.

Exercice 4. Déterminez les domaines de définition et dérivez :

(a) $f(x) = \ln(x^2);$

(b) $f(x) = \frac{1}{\ln 2x};$

(c) $f(x) = x \ln(x);$

(d) $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3);$

(e) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right);$

(f) $f(x) = \ln(e^{-x}).$

Exercice 5. Dérivez

(a) $f(x) = e^{x^2};$

(b) $f(x) = xe^x;$

(c) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 5)e^x;$

(d) $f(x) = x^2e^{x^2};$

(e) $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}.$

Exercice 6. Déterminez les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^x + 100e^{-x} - x^3;$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x^2} + x^2}{x^3};$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}};$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\ln(x) - 5x;$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \ln(x)$;

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x+1}$;

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x-1)}{x+1}$;

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \ln(x)}{x^2 + 1}$;

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

(a) $e^{3x} = 2e^{4x+5}$;

(b) $\ln(3x+4) = 1 + \ln(3)$;

(c) $\ln\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) = 0$.

Exercice 8. Étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, limites, sens de variation, représentation graphique) :

(a) $f(x) = (x-1)\ln(x-1)$;

(b) $f(x) = xe^{-2x}$;

(c) $f(x) = x + \ln(2x)$;

(d) $f(x) = e^{2x^2-x-1}$;

(e) $f(x) = \ln(x^2+4)$;