Intégration

1 Primitives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f admet une primitive, c'est-à-dire une fonction $F : I \to \mathbb{R}$, telle que $F' = f$ sur I. De plus, si F est une primitive de f, alors les primitives de f sont toutes les fonctions G de la forme :

$$G(x) = F(x) + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

2 Intégrale d'une fonction

Soit $a < b$ deux nombres réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f de a à b le nombre réel défini par

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f. Ce nombre ne dépend pas de la primitive F choisie.

Propriété de linéarité : pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables,

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

Interprétation géométrique : si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la surface comprise entre C_f et l'axe des abscisses (dessin). Dans le cas général, $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire algébrique de cette surface (dessin).

Conséquence : si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

3 Calcul intégral

On désigne par cette expression :
- soit le calcul d'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$, le résultat est un nombre.
- soit le calcul d'une primitive. On peut alors aussi utiliser la notation $\int$ pour mener les calculs. Exemple : $\int^x e^t + t + \frac{1}{t}dt$. Le résultat est une fonction.

3.1 Intégration "directe"

Exemples + "formules" sur les groupements du genre $u.u'$, u'/u, $u'.v' \circ u$, $\frac{u'}{1+u^2}$,....

3.2 Intégration par partie

Soit $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Exemples

3.3 Transformation de l'écriture : décomposition en fraction rationnelle

3.4 Changement de variables