L1 - Mathématiques pour la biologie - S1

Feuille d'exercices 5 - Intégration (2)

Exercice 1. Intégrer par changement de variable

(a) $\int_2^5 \frac{1}{2t-3}dt$ avec $u = 2t - 3$;

(b) $\int_0^y \frac{3t}{\sqrt{t^2+5}}dt$ avec $u = t^2 + 5$;

(c) $\int_1^y \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$ avec $u = \sqrt{1+t}$; (on pourra utiliser l'identité $\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\Big)$.)

(d) $\int_0^y \frac{2dt}{e^t+e^{-t}}$ avec $u = e^t$; (utiliser l'identité $\frac{u^2}{u^2+1} = 1 - \frac{1}{u^2+1}$).

(e) $\int_9^y \ln(\sqrt{t} - 1)dt$ avec $u = \sqrt{t}$.

(f) $\int \frac{\ln t \, \mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ avec $u = \ln t$.

(g) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$.

(h) $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$.

Exercice 2. Calculer

(a) $\int \frac{1}{t^2-t-12}dt$;

(b) $\int \frac{1}{t^2+5t+6}dt$;

(c) $\int \frac{1}{t^2-6t+9}dt$;

(d) $\int \frac{1}{4t^2-4t-3}dt$;

(e) $\int \frac{1}{t^2+t+1}dt$;

(f) $\int \frac{t-3}{t^2+t+1}dt$;

(g) $\int \frac{t}{t^2+2t+10}dt$;

Exercice 3. Déterminer les nombres réels a, b tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x-2)}$.

Exercice 4. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2}.$$

En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+2)}$.

Exercice 5. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

$$\frac{x^2+x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

En déduire une primitive de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x}{x(x-1)(x+1)}$.