Équations différentielles linéaires

1 Définition, principes de base

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction (souvent notée y) et qui fait intervenir les dérivées successives de y.

Exemple : $(E_1) : y' + 2y = 0$, $(E_2) : 2ty'' + 4y = e^t$,...

Les équations différentielles que nous étudierons seront des équations linéaires : si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi une solution de la même équation.
Il y a les équations sans second membre, dites homogènes. Exemple : $(E_2) : 2ty'' + 4y = e^t$. Distinguer l'équation homogène.

Principe général pour la résolution d'une équation différentielle linéaire : on obtient toutes les solutions en additionnant une solution particulière de l'équation de départ et une solution de l'équation sans second membre.

Exemple : Soit $(E) : y' + 2y = te^{-2t}$. La solution de l'équation homogène est de la forme $y_h = Ae^{-2t}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et on peut montrer qu'une solution particulière $y_0 = \frac{t^2}{2}e^{-2t}$. Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme

$$y = y_h + y_0 = Ae^{-2t} + \frac{t^2}{2}e^{-2t} \quad (A \in \mathbb{R}).$$

2 Équation de la forme $(E)\ :\ y' + a(t)y = b(t)$

Première étape : on résout l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$. La solution est de la forme

$$y_h(t) = \lambda e^{-a(t)}, \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Deuxième étape : on cherche directement une solution générale de (E) sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-a(t)}$.
On écrit que y est solution de $E)$ puis on se ramène à un calcul de primitive.

Exemple : $(E) : y' + 2y = te^{-2t}$.

Cette méthode est appelée « variation de la constante ».

3 Équation de la forme $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(t)$

Ici a, b et c sont des nombres constants.
Première étape : on résout l'équation homogène $(E_h)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$. Pour cela on résout dans $\mathbb{C}$ l'équation dite caractéristique :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Il y a alors trois cas à distinguer :
– si $\Delta > 0$, il y a deux solutions notées r_1 et r_2 et la solution générale de (E_h) est de la forme

$$y_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

– si $\Delta = 0$, il y a une solution double r_0 et la solution générale de (E_h) est de la forme

$$y_h(t) = (At + B)e^{r_0 t} \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

– si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes distinctes conjuguées z_1 et z_2 qui s'écrivent sous la forme

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On pose alors $u = \Re(z_1) = -\frac{b}{2a}$ et $v = \Im(z_1) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. La solution générale de (E_h) est de la forme [1]

$$y_h(t) = e^{ut}\Big(A\cos(vt) + B\sin(vt)\Big) \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

Deuxième étape : Il reste ensuite à trouver une solution particulière y_0 de (E) : il n'existe pas de méthode systématique, on rencontrera certains cas particuliers en exercices.
Troisième étape : on applique le principe mentionné plus haut : la solution générale de (E) est de la forme

$$y = y_h + y_0.$$

1. ou encore $y_h(t) = Ae^{ut}\cos(vt + B) \quad (A, B \in \mathbb{R})$.