Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2010–2011

Licence Biologie 1 ère année — vendredi 07 janvier 2011

Examen de Mathématiques

Formulaire et calculatrice personnelle autorisés
Autres documents non autorisés
Durée : 2h

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + t^2 y = 0$ et déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$;

b) $y' + t^2 y = \dfrac{1}{t^2+1} e^{-\frac{t^3}{3}}$;

c) $y'' - 5y' + 4y = 0$ et déterminer la solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$;

d) $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$ (on cherchera une solution particulière de la forme $(at+b)e^{2t}$.

Exercice 2. Calculer

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t-6} \mathrm{d}t$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{t^2+t-6} \mathrm{d}t$;

c) $\displaystyle\int 0^x \frac{1}{t^2+2t+3} \mathrm{d}t$.

Exercice 3. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes. Si la série converge donner si possible sa limite.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2k^3+k-1}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k}$;

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!}$.

Exercice 4. On définit deux fonctions f et g par $f(x) = 1/2(e^x + e^{-x})$ et $g(x) = 1/2(e^x - e^{-x})$.

a) Donner les domaines de définition de f et g.

b) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et que $g'(x) = f(x)$.

c) Étudier la fonction $g(x)$ (limites, tableau de variation).

d) Montrer l'identité $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$. Pour cela, on pourra dériver la fonction $h(x)$ définie pas $h(x) = f(x)^2 - g(x)^2$ et conclure.

e) Calculer $\displaystyle\int_0^t f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}x$.