Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2013–2014
Licence 2ème année — Informatique

Calcul Formel & Courbes et Surfaces

Durée : 2 h le mardi 27 mai
Documents et calculatrices personnelles autorisés

Exercice 1. Soient $i \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ deux entiers, on note $[i]_n$ la classe de i modulo n. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes modulo n :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\, [i]_n \mid i \in \{0, ..., n-1\}\}$$

1) Déterminer $[3]_7 + [6]_7$, $[5]_8 \times [3]_8$.

2) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

3) Déterminer les inverses de $[3]_8$ et $[7]_8$.

Exercice 2. Soient $q = (1, 0, -1, 1)$ et $q' = (1, 1, 2, 1)$ deux quaternions.

1) Calculer $q + q'$.

2) Calculer $q \times q'$.

3) Calculer les normes de q et de q'.

4) Calculer q^* le conjugué de q.

5) Calculer q^{-1} l'inverse de q.

Exercice 3. Soient $A = (0, -1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (2, 2)$, $D = (3, -1)$ et $E = (1, 1)$ des points du plan.

1) Faire un dessin.

2) Calculer les coordonnées des barycentres $\mathrm{Bar}((A, 1)(B, 1))$, $\mathrm{Bar}((B, 2), (E, -3)$ et $\mathrm{Bar}((A, 1), (B, 2), (C, 3))$.

3) Le polygone A, B, C, D, E noté $\mathcal{P}$ est-il convexe ? Justifier.

4) Quelles sont les points parmi A, B, C, D et E qui délimitent l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$?

Exercice 4. Un élement de $\mathbb{F}_2^n$ pourra être noté sous la forme d'un mot binaire de n lettres ou d'un vecteur colonne de taille n. Soit φ le code correcteur défini par

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{F}_2^3 & \to & \mathbb{F}_2^6 \\ & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_2 + b_3 \\ b_1 + b_3 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

1) Quel est le paramètre du code φ?

2) Quelle est l'image du code φ.

3) Quelle est la distance minimale de φ?

4) Quelles sont les capacités de détection et de correction pour φ ?

5) Le code φ est-il linéaire ? systématique ?

6) Le code φ est-il MDS ?

7) Donner la matrice génératrice de φ.

8) Donner une matrice de contrôle pour φ.

9) Calculer la table de décodage de φ.

10) Décoder les mots 101110 et 100010.

Exercice 5. Soient $P_0 = (0,1)$, $P_1 = (1,0)$ et $P_2 = (2,2)$ quatre points du plan. Le couple (x_i, y_i) désigne les coordonnées de P_i pour $i = 0,1,2$.

1) Calculer les polynômes $L_0(X), L_1(X)$ et $L_2(X)$ de $\mathbb{Q}[X]$ vérifiant

$L_0(0) = 1,\ L_0(1) = 0,\ L_0(2) = 0,\ L_1(0) = 0,\ L_1(1) = 1,\ L_1(2) = 0,\ L_2(0) = 0,\ L_2(1) = 0$ et $L_2(2) = 1$.

2) En déduire le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{Q}[X]$ vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 2$.

Exercice 6. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont représentés par le type `Rationnel` et toutes les opération élémentaires `+,-,*,/,=,==,!=` sont disponibles.

Une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{Q})$ avec $n \in \mathbb{N}$ est représentée par le type `Matrice`. L'entier n est la *taille* de A. Pour $i, j \in \{1, ..., n\}$ on note $a_{i,j}$ le coefficient (i,j) de A et $A_{i,j}$ la matrice obtenue de A en supprimant la ligne i et la colonne j. Les fonctions utiles sont :

- `Matrice(n)` retournant la matrice nulle de $M_n(\mathbb{Q})$;
- `A.taille()` retournant la taille de la `Matrice A`;
- `A[i][j]` permettant d'accéder au coefficient (i,j) de la `Matrice A`.

Un vecteur colonne u de $\mathbb{Q}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ est représenté par le type `Vecteur`. L'entier n est la *taille* de u. Les fonctions utiles sont :

- `Vecteur(n)` retournant le vecteur nul de $\mathbb{Q}^n$.
- `u.size()` retournant la taille du `Vecteur u`;
- `u[i]` permettant d'accéder au coefficient i du `Vecteur u`.

1) Ecrire une fonction

```
Matrice transpose(Matrice A)
```

retournant la matrice transposée ${}^tA$ de A.
2) Une matrice carrée A est dite symétrique si ${}^tA$ est égale à A. Ecrire une fonction

```
bool estSymmetrique(Matrice A)
```

testant si la matrice A est symétrique.
3) Ecrire une fonction

```
Vecteur multiplication(Matrice A,Vecteur U)
```

qui étant donné une matrice A et un vecteur u de même taille retourne le vecteur $A \times u$.
4) Un vecteur $u \in \mathbb{Q}^n$ est dit *vecteur propre* d'une matrice A de $M_n(\mathbb{Q})$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que $A \times u = \lambda u$. Ecrire une fonction

```
bool estVecteurPropre(Matrice A,Vecteur u)
```

qui teste si le vecteur u est un vecteur propre de A.
5) Ecrire une fonction

```
Matrice sousMatrice(Matrice A,int i,int j)
```

qui retourne la matrice $A_{i,j}$.
6) On rappel que pour $A \in M_n(\mathbb{Q})$, on a la relation

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1,i} A_{1,i}.$$

A l'aide de cette formule ecrire une fonction récursive

```
Rationnel determinant(Matrice A)
```

retournant le déterminant de A.